MODELSÆT 2; MATEMATIK TIL LÆREREKSAMEN

Forberedende materiale

Den individuelle skriftlige prøve i matematik vil tage udgangspunkt i følgende materiale:

1. En diskette med to regnearks-filer og en MathCad-fil.
2. Et notat "Simulering på datamaskine" med forklaring på filernes indhold og virkemåde (2 sider).
3. Et notat om induktionsbeviset (4 sider).
4. Uddrag af bogen „Geometri" af Ib Axelsen; Gjellerup & Gad, 1986 (3 sider).
5. Et uddrag fra „Matematik i syvende"; Gyldendal, 1998 (2 sider).

Det skrevne materiale medbringes til den skriftlige prøve. Også kopier af disketten kan medbringes, men opgaverne til prøven vil kunne besvares uden, at man ved selve prøven har mulighed for at benytte regneark eller MathCad.

Såvel regnearkene som MathCad-arket kan desuden hentes på adressen

http://www.netby.net/Havnen/Lystbaade/Monk/examen2/

Simulering på datamaskine

En del af det forberedende materiale består af to regnearksfiler og en MathCad-fil. Det er kun nødvendigt at arbejde med ét af regnearkene eller med MathCad-arket.

Fælles for de tre ark er, at de giver mulighed for at simulere gentagne udførelser af eksperimentet "Kast med tre terninger, og notér summen af øjentallene".

Om regnearkene
Regnearksfilerne er skrevet til regnearksprogrammerne Works og Excel. De to regneark bruges på lidt forskellige måder, som forklaret herunder.

Når regnearket er indlæst, foretages en simulering af et kast ved at trykke på funktionstasten F9. Holdes denne tast nedtrykket, vil simuleringerne blive foretaget i hurtig rækkefølge, og det er derfor muligt i løbet af kort tid at foretage mange simuleringer af eksperimentet. Slippes F9 stopper simuleringen, og man kan notere resultater, skrive ud, fremstille diagrammer mv. Hvis man atter trykker på F9, fortsættes **den samme** forsøgsrække, og det er således muligt at iagttage, hvordan fx frekvenserne for de enkelte udfald udvikler sig efterhånden som antallet af kast vokser.

Works-regnearket
Navnet på regnearket er TERNING3.WKS.

Når regnearket indlæses fra disketten, startes simuleringen ved at kopiere celle B7 nedad til cellerne B8, B9 og B10. Derved foretages simuleringen af første kast. Funktionstasten F9 bruges til at fortsætte simuleringen som forklaret ovenfor.

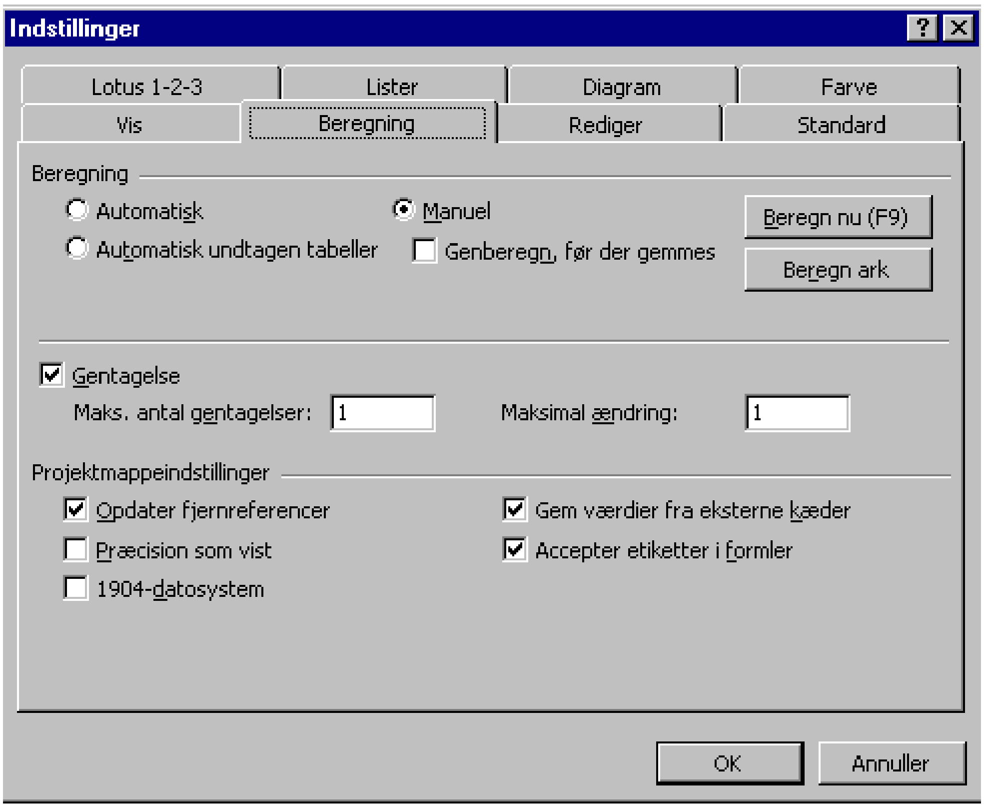
Regnearket kan ikke "nulstilles", så en ny udførelse af en eksperimentrække må foretages ved, at "startarket" hentes frem på ny, celle B7 kopieres osv. Det er derfor vigtigt, at man ikke gemmer regnearket under samme navn, når det har været i brug. Skulle det ske, kan arket hentes på nettet.

Excel-regnearket
Navnet på regnearket er TRETERN.XLS.

Når det åbnes, vil Windows måske spørge, om du vil åbne filen med eller uden makroer. Det er nødvendigt at svare JA for at få arket til at virke efter hensigten.

Det er muligt, at der, når arket åbnes, fremkommer følgende fejlmelding:

I så fald skal man under *Funktioner* i menuen *Indstillinger* finde nedenstående dialogboks ved at trykke på fanen *Beregning*:



Sørg derefter for, at alle indstillinger er nøjagtig som ovenfor.

Regnarket kan nulstilles ved at klikke med musen på "knappen" med teksten Nulstil.

Om MathCad-arket

Navnet på matematikarket er 3terning.mcd

MathCad-arket er klar, så snart det er åbnet. Man begynder med at vælge, hvor mange kast man vil lade arket simulere. Herefter simulerer MathCad hele serien på én gang.
Resultatet af hvert enkelt kast i simulationen kan ses i arkets første tabel. I den anden tabel er optalt henholdsvis hyppighederne og frekvenserne af de enkelte udfald.

Hvis man vil lave en ny simulation, kan man fx gøre det ved at klikke sig ind i det gule felt og trykke på F9.

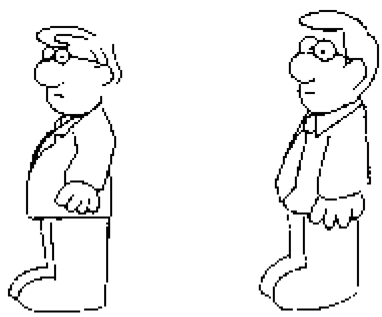
Induktionsbeviset

Vi vil her beskrive en bevistype, der meget ofte anvendes i forbindelse med udsagn, som gælder for alle naturlige tal, nemlig det såkaldte **induktionsbevis**. Der er (udover bevisets generelle anvendelighed) flere grunde til, at dette bevis er interessant: Dels benytter det nogle meget væsentlige egenskaber ved de naturlige tal, og dels illustrerer det én af de måder, hvorpå matematiske bestræbelser af og til går ud på „at gøre det uendelige endeligt".

Idéen bag beviset

For at forklare, hvad tankegangen i induktionsbeviset er, vil vi forestille os følgende situation:

Du står overfor 10000 mennesker og har fået til opgave at afgøre, om de allesammen bærer briller! Hvis du kan få øje på blot én uden briller, er opgaven selvfølgelig løst, for når bare der er én uden briller, kan de jo ikke alle bære briller. Nu er 10000 mennesker temmelig mange, og problemet er, at alle du kan se derfra, hvor du står, bærer briller. Selvfølgelig er det muligt at gå alle igennem fra den ene ende (**inspektion**). Første gang du ser en person uden briller, er du færdig, men hvis alle faktisk bærer briller, må man hele rækken igennem. Og hvis kun én er uden briller kan han/hun være den sidste af de 10000. Alt i alt en temmelig stor opgave.
Så får du en lys idé! Du beder de 10000 (som er meget lydige) stille sig op på en række bag hinanden *på en sådan måde, at hvis en person bærer briller, skal den næste person i rækken også bære briller!* (De skal med andre ord stille sig op således, at de der bærer briller - hvad enten det er ingen, nogle eller alle - står sidst):



hvis denne person bærer briller	**så** vil også denne person bære briller.

Det snedige ved denne opstilling er, at *nu er det nok at se på, om den første person i rækken bærer briller!*

Hvis person nr. 1 ikke bærer briller, er vi færdige. Hvis person nr. 1 bærer briller, ved vi, at så bærer personen bag ved (nr. 2) også briller. Men hvis person nr. 2 bærer briller, vil personen bagved (nr. 3) ligeledes bære briller osv. På denne måde kan vi slutte os til, at hvis person nr. 1 bærer briller, da bærer alle briller. Vi kan altså bekræfte påstanden („bevise sætningen") „Denne person bærer briller" om *alle* 10000 blot ved at kontrollere en enkelt.

Bemærk, at metoden ikke afhænger af, hvor mange personer der er tale om. Den vil virke for 50, 10000, 1000000 personer. Ja, sågar hvis vi kunne forestille os „uendeligt mange" personer, *ville metoden stadig virke!*

Bemærk også, at der en stærk lighed mellem den personrække, vi her forestiller os og de naturlige tal (i modsætning til de fleste andre talmængder). Grundlaget for ovennævnte opstilling er bl.a., at der i rækken er et entydigt bestemt første element, som vi kan kontrollere. På samme måde har de naturlige tal et entydigt bestemt første element, nemlig tallet 1.

Endvidere giver selve rækkeopstillingen den egenskab, at enhver person har en entydigt bestemt efterfølger - personen bagved. På samme måde har ethvert naturligt tal p en entydigt bestemt efterfølger, nemlig tallet p+1.

Det er disse egenskaber ved de naturlige tal, der gør, at ideen kan overføres til beviser for påstande om mængden af naturlige tal, som eksemplerne herunder viser.

Eksempler
Vi vil demonstrere bevisets gang på to eksempler.

Eksempel 1
Bevis, at for ethvert naturligt tal *n* gælder formlen:

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Bevis:
Først viser vi, at formlen gælder for $n = 1$.
For $n = 1$ er venstre side af lighedstegnet lig med tallet $1^2 = 1$.
Højre side bliver tallet $\frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot 1+1)}{6}=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}=1$
Altså gælder formlen for $n = 1$.

Vi antager nu, at der findes et naturligt tal p, således at formlen gælder for $n = p$, dvs. således at

$$1^2+2^2+\ldots+p^2=\frac{p(p+1)(2p+1)}{6}$$

Vi vil så undersøge, om formlen under denne antagelse også gælder for tallet p+1, dvs. således at

$$1^2+2^2+\ldots+p^2+(p+1)^2=\frac{(p+1)((p+1)+1)(2(p+1)+1)}{6}$$

Ved at regne på venstre side og bruge antagelsen får vi:

$$\begin{aligned}1^2+2^2+\ldots+p^2+(p+1)^2&=\frac{(p)(p+1)(2p+1)}{6}+(p+1)^2\\&=\frac{2p^3+3p^2+p}{6}+\frac{6(p^2+2p+1)}{6}\\&=\frac{2p^3+9p^2+13p+6}{6}\end{aligned}$$

Ved at regne på højre side får vi:

$$\frac{(p+1)((p+1)+1)(2(p+1)+1)}{6}=\frac{(p+1)(p+2)(2p+3)}{6}$$

$$= \frac{(p^2+3p+2)(2p+3)}{6}$$

$$= \frac{2p^3+9p^2+13p+6}{6}$$ - altså det samme som før.

Vi har nu vist, at *hvis* formlen gælder for et naturligt tal p, *så* gælder den også for det næste naturlige tal $p+1$. Vi ved, at formlen gælder for $n = 1$. Den gælder derfor også for tallet 1+1=2, dermed for tallet 2+1=3, osv. Altså gælder formlen for alle naturlige tal.

Eksempel 2
En række tal, hvor kvotienten mellem hvert tal og det foregående er konstant, kaldes en *kvotientrække*. Hvis første tal i rækken er 1 og kvotienten betegnes q, er der tale om talrækken $1, q, q^2, q^3, \dots , q^n, \dots$

Summen af de n første tal i denne række er tallet $1+q+q^2+q^3+\ldots+q^{n-1}$. Dette tal dukker op i forskellige sammenhænge, og det har derfor interesse at finde en formel, så denne sum let kan udregnes:

Bevis formlen

$$1+q+q^2+q^3+\ldots+q^{n-1} = \frac{q^n-1}{q-1}, q \neq 1$$

ved induktion.

Bevis:
Først undersøger vi, om formlen gælder for $n = 1$. Da er venstre side lig med 1, og højre side er

$$\frac{q^1-1}{q-1} = \frac{q-1}{q-1} = 1$$

Altså gælder formlen for $n = 1$.

Vi antager nu, at formlen gælder for et vist naturligt tal p, således at

$$1+q+q^2+q^3+\ldots+q^{p-1} = \frac{q^p-1}{q-1}$$

Vi vil så undersøge, om formlen under denne antagelse gælder for tallet $p + 1$, således at

$$1+q+q^2+q^3+\ldots+q^{p-1}+q^p = \frac{q^{p+1}-1}{q-1}$$

Ved at regne på venstre side af lighedstegnet og benytte antagelsen, får vi

$$1+q+q^2+q^3+\ldots+q^{p-1}+q^p = \frac{q^p-1}{q-1}+q^p$$

$$=\frac{q^p-1}{q-1}+\frac{q^p(q-1)}{q-1}$$

$$=\frac{q^p-1}{q-1}+\frac{q^{p+1}-q^p}{q-1}$$

$$=\frac{q^p-1+q^{p+1}-q^p}{q-1}$$

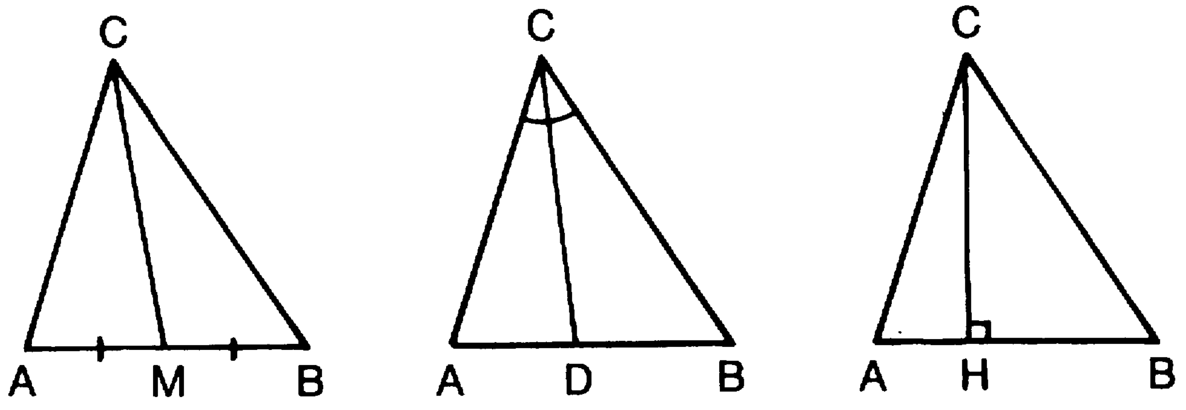
$$=\frac{q^{p+1}-1}{q-1}$$

Vi har derfor, at *hvis* formlen gælder for et vist naturligt tal, *så* gælder den også for det næste naturlige tal.

Da vi ved formlen gælder for $n = 1$, vil den også gælde for $n = 2$, dermed for $n = 3$, $n = 4$ osv. Altså gælder formlen for ethvert naturligt tal n.

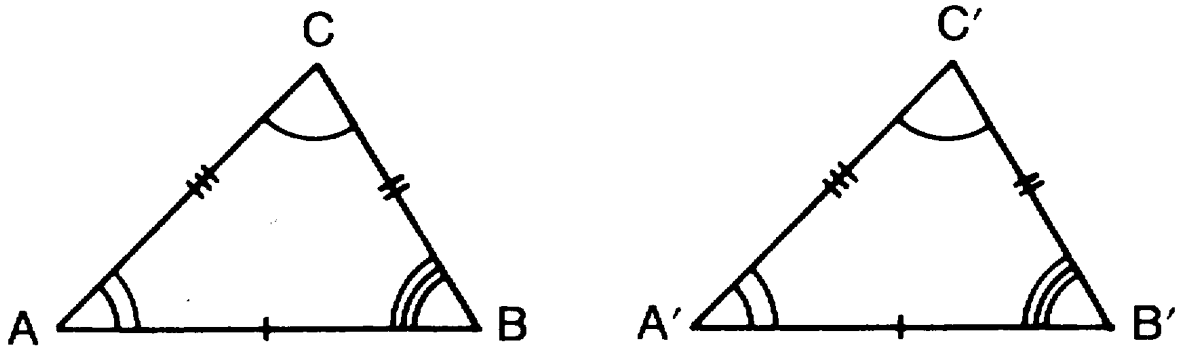
Uddrag fra „Geometri” af Ib Axelsen

Trekanter
I forbindelse med trekanter har man givet navne til bestemte liniestykker:



Liniestykket, der forbinder en vinkelspids med midtpunktet af den modstående side, kaldes en *median.* Tilsvarende er *vinkelhalveringslinien* det liniestykke CD, der halverer vinklen, og *højden* CH står vinkelret på den modstående side.

Vi vil definere kongruens af to trekanter. Trekanterne ABC og A'B'C' kaldes *kongruente,* når siderne og vinklerne parvis er lige store:



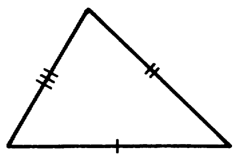
Når trekanterne er kongruente, skriver vi $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$. To kongruente trekanter kan bringes til at dække hinanden. Ved praktisk anvendelse af geometri er situationen ofte den, at der foreligger en geometrisk figur, hvor man måler nogle af dens dele, hvorefter figuren kan rekonstrueres. Man foretager f.eks. en opmåling af en stue, hvorefter et væg-til-væg tæppe klippes til. Man må så håbe, at der er nok oplysninger til, at tæppet konstrueres, så det er »kongruent« med gulvet og kommer til at passe.
Vi vil undersøge, hvad der skal til for at sikre, at trekanter er kongruente. En trekant har tre sider og tre vinkler. Disse omtales som trekantens stykker.

Ofte gælder, at hvis tre tilsvarende stykker i to trekanter er lige store, er trekanterne kongruente.

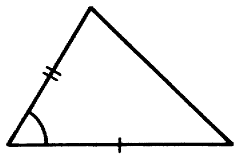
Der gælder:

To trekanter ABC og A'B'C' har tre stykker lige store.

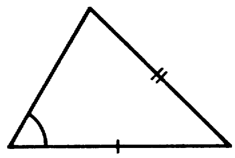
I Alle tre sider:
Trekanterne er kongruente.



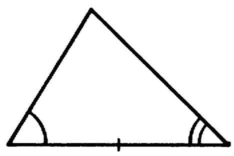
II En vinkel og de hosliggende sider:
Trekanterne er kongruente.



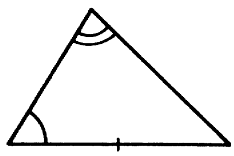
III En vinkel, en hosliggende og den modstående side:
Trekanterne er ikke nødvendigvis kongruente.



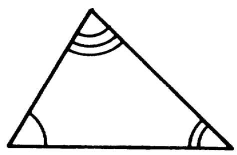
IV En side og de to hosliggende vinkler:
Trekanterne er kongruente.



V En side, en hosliggende og den modstående vinkel:
Trekanterne er kongruente.



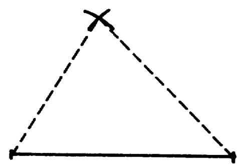
VI Alle tre vinkler:
Trekanterne behøver på ingen måde være kongruente.



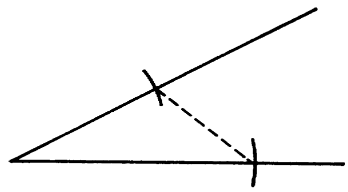
I hvert af tilfældene ser vi på konstruktion af en trekant ud fra de tre stykker. Derved ser vi påstandenes rigtighed, idet trekanteme er kongruente, hvis trekanten kun kan se ud på én måde.

Tilfælde I:
Det første liniestykke afsættes, og ud fra endepunkterne tegnes cirkler med de to andre liniestykker som radius:

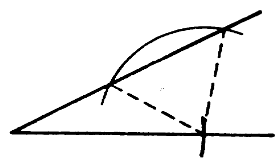
Den fremkomne trekant har de givne liniestykker som sider, og den kan ikke se anderledes ud.



Tilfælde II:
Ud ad benene på den givne vinkel afsættes de givne liniestykker:
Trekanten kan kun se ud på én måde.

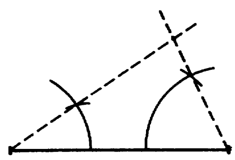


Tilfælde III:
Ud ad det ene ben på den givne vinkel afsættes den hosliggende side:



Med det fremkomne punkt som centrum tegnes en cirkel, hvis radius er lig med den modstående side. Det ses, at der kan være to muligheder, så trekanterne er ikke nødvendigvis kongruente.

Tilfælde IV:
Ud fra endepunkterne af den givne side afsættes de hosliggende vinkler:



Tilfælde V:
Da vinkelsummen i en trekant er 180°, er den sidste vinkel bestemt.
Dermed svarer det til tilfælde IV.

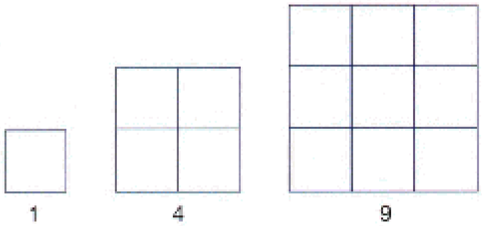
Tilfælde VI:
Trekanterne er *ensvinklede.* Vi kan vælge en side af vilkårlig længde og afsætte de to hosliggende vinkler. Dermed passer den sidste vinkel også. Trekanterne kan altså se ud på mange måder. At kende alle tre vinkler i en trekant svarer i virkeligheden til kun at kende to af stykkerne, da vinkelsummen altid er 180°.

Uddrag fra „Matematik i syvende"

JOB 42
KVADRATTAL

Når man skal regne gangestykker i hovedet, kan det være en hjælp, hvis man kender kvadrattallene.

De 3 første kvadrattal er:



1. • Find og tegn de næste 2 kvadrattal.
   • Hvorfor kaldes disse tal for kvadrattal?

Kvadrattallene kan skrives på en særlig måde.
Fx kan 9 skrives som 3^2.
3^2 betyder $3 \cdot 3$ og siges: "Tre i anden".

Udtrykket 3^2 kaldes for en potens.

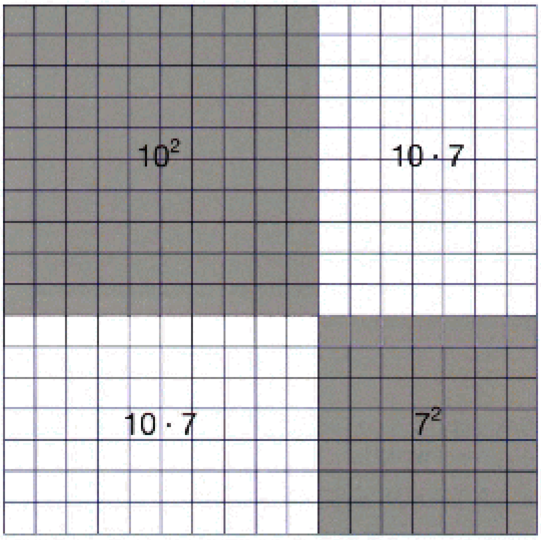
Der gælder altså, at
$3 \cdot 3 = 3^2$

2. • Hvad betyder 7^2?
   • Hvordan kan man også skrive $8 \cdot 8$?

3. Find de 10 første kvadrattal, og skriv dem i en tabel som vist herunder.

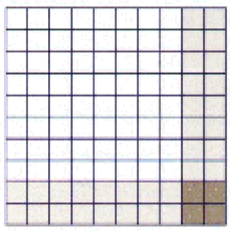
	1	2	3	4
Gangestykke	$1 \cdot 1$	$2 \cdot 2$	$3 \cdot 3$	
Potens	1^2	2^2	3^2	
Kvadrattal	1	4	9	

Herunder ses en tegning af et kvadrat på $17 \cdot 17$ tern, arealet er altså kvadrattallet 17^2.
Kvadratet er delt op, så det bliver lettere at regne ud, hvilket tal 17^2 er.



4. • Brug tegningen herover, og skriv et regneudtryk, der viser, hvordan 17^2 $(10 + 7)^2$ kan regnes ud.
   • Lav en tilsvarende tegning for 15^2 $(10 + 5)^2$, skriv et regneudtryk, og beregn 15^2.
   • Prøv med 24^2.

Tegningen herunder viser kvadrattallet $(10 - 2)^2$.



5. • Hvordan plejer man at skrive kvadrattallet $(10 - 2)^2$?
   • Forklar vha. tegningen, hvorfor
     $(10 - 2)^2 = 10^2 - 2 \cdot 10 - 2 \cdot 10 + 2^2$
   • Beregn på samme måde $(100 - 3)^2$.

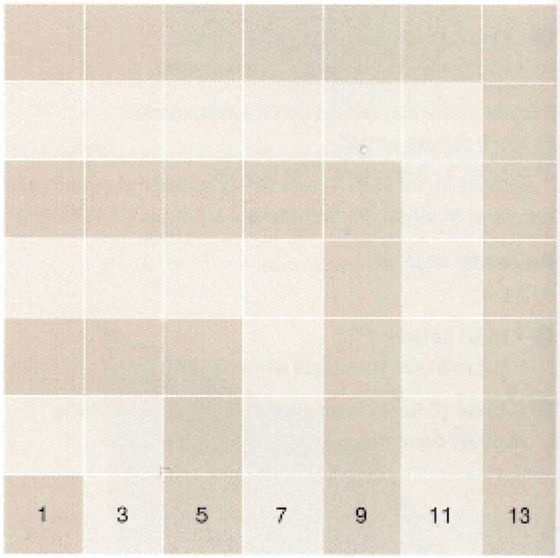
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	4	9	16					
10	100	121	144	169					324	[illegible]
20	400	441	484	529		625	676	[illegible]	[illegible]	
30	900	961	1024	1089			1296			
40	1600									
50	[illegible]									

Herover ses en **kvadrattabel**, hvor en del af felterne er udfyldt. I tabellen kan man læse, at
$30^2 = 900$
$33^2 = 1089$

6 Brug kopiark 22, og udfyld resten af tabellen uden at bruge lommeregner.

7 Aflæs i tabellen værdien af
37^2
78^2

8 Gå på opdagelse i kvadrattabellen.
- Hvad er forskellen mellem
  1^2 og 2^2?
  5^2 og 6^2?
  49^2 og 50^2?
- Kan du finde forskellen på 102^2 og 103^2 uden at regne 102^2 og 103^2 ud?
- Hvilke ligheder er der mellem kvadrattallene i samme søjle?
- Hvorfor kan et tal, der ender på 8, ikke være et kvadrattal?



9 Brug tegningen herover til at beregne
- $1 + 3$
- $1 + 3 + 5$
- $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13$

10 Forklar, hvordan man vha. kvadrattal kan beregne
- $1 + 2 + 3 + ... + 31$
- $1 + 2 + 3 + ... + 99$