

Matematik

Opgavesættet er beregnet til besvarelse på 6 timer.

1	Algebra og ræsonnementer
----------	---------------------------------

En af de algebraiske omskrivninger, som ofte behandles i skolen, er

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

Med ord siger sætningen:

”To tals sum gange de samme to tals differens er lig med kvadratet på første tal minus kvadratet på andet tal.”

Man kan bevise denne sætning ved at gange parenteserne på venstre side af lighedstegnet sammen og reducere, hvorved udtrykket på højre side fremkommer.

Man kan også forsøge at illustrere sætningen geometrisk. Til højre er fremstillet en ”tegneserie”, som illustrerer sætningen.

1.1 Skriv på svararket en forklaring til ”tegneserien”, der svarer til den forklaring, du ville give til elever, der skal overbevises om, at $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$

Det kan i læringsammenhæng være hensigtsmæssigt at lade elever arbejde med forskellige argumentationer for samme sætning.

1.2 Fremstil en anden grafisk forklaring som argumentation for sætningen $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$

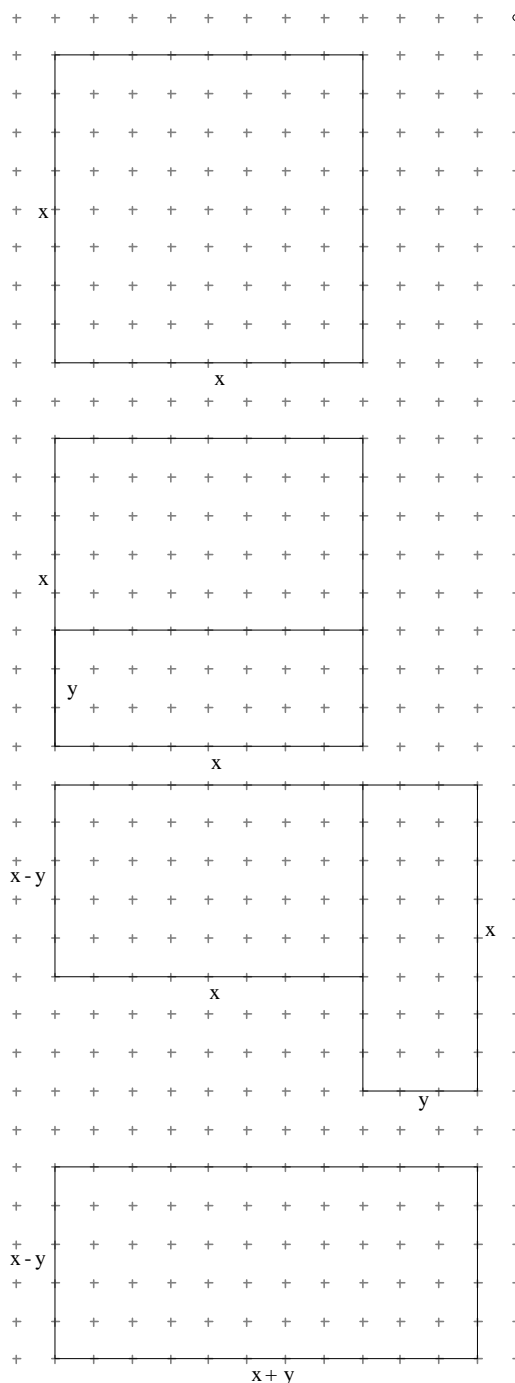
I klippet fra ”Matematik i syvende” side 52 bruges kvadrattal til at udtrykke visse summer af ulige tal. Ved at løse opgave 9 opdager man, at

$$1 + 3 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 7^2$$

1.3 Beregn værdien af summen $1 + 3 + 5 + \dots + 39$



1.4 Bevis (fx ved induktion), at der for alle naturlige tal n gælder

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

Hvis n er et ulige helt tal, er både $n-1$ og $n+1$ lige tal, hvorfor $\frac{n+1}{2}$ og $\frac{n-1}{2}$ er hele tal.

1.5 Vis, at $(\frac{n+1}{2})^2 - (\frac{n-1}{2})^2 = n$

Herunder er givet et ”bevis” for, at der ikke findes andre primtal end 2.

Alle lige tal større end 2 er sammensatte, da 2 er divisor.

Lad nu n være et ulige tal.

Da er tallene $x = \frac{n+1}{2}$ og $y = \frac{n-1}{2}$ begge hele tal, og

dermed er også $x+y$ og $x-y$ hele tal.

Desuden gælder $n = x^2 - y^2$

Og da $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ har vi $n = (x + y)(x - y)$.

Altså kan n skrives som et produkt af to hele tal, og det er derfor ikke et primtal.

Nu findes der jo faktisk andre primtal end 2, så der må være en fejl i beviset.

1.6 Find fejlen.

2

Simulering

Du har i det forberedende materiale haft oplæg til simulering af kast med tre terninger. Du skal forestille dig, at du vil bruge et eller flere af dem (eller lignende) i din undervisning på afsluttende trin i folkeskolen.

På denne baggrund skal du besvare følgende:

2.1 Hvordan vil dit oplæg til eleverne være?

2.2 Hvilke matematikfaglige ting mener du, at eleverne kan lære af dit forløb?

2.3 Hvordan vil du sætte eleverne til at bruge simuleringerne?

2.4 Hvad vil du bede eleverne om at lægge mærke til (at notere sig) under forløbet?

2.5 Hvordan vil du samle op på forløbet?

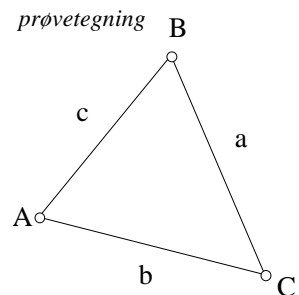
I trekant ABC er vinkel A og siderne a og b givet (se *prøvetegning*).

3.1 Tegn to trekanter, der ikke er kongruente, men som begge opfylder, at de har en vinkel $A = 60^\circ$ med den modstående side $a = 14$ cm og en hosliggende side $b = 16$ cm.

Som det fremgår af det forberedende materiale (og opgave 3.1), vil to trekanter, der har en vinkel A, en modstående side a og den hosliggende side b parvis lige store, ikke nødvendigvis være kongruente.

3.2 Formuler for hvert af tilfældene $A < 90^\circ$, $A = 90^\circ$ og $A > 90^\circ$, hvilke betingelser man må stille til trekantens sider a og b, for at sikre kongruens? Formuler fx sætninger af formen:

To trekanter, der har en ... vinkel, en hosliggende og den modstående side parvis lige store er kongruente, hvis...

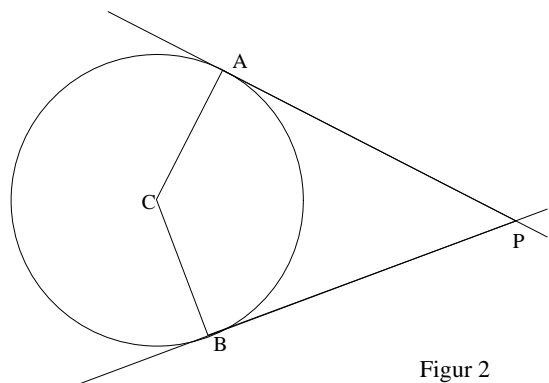


Figur 1

Når der er givet en cirkel og et punkt P udenfor cirklen, kan man tegne to tangenter til cirklen gennem P (figur 2).

De to røingspunkter kaldes A og B.

3.3 Bevis, at $|AP|=|BP|$.



Figur 2

I programmer, der kan behandle geometri, kan visse geometriske sammenhænge erfares ved at ”eksperimentere” med dynamiske figurer.

3.4 Giv et eksempel på en øvelse med et sådant geometriprogram, som giver eleverne mulighed for at erfare et udvalgt resultat om trekanter.

