Indstillingsopgave matematik
07-03-03

Arealbegrebet i folkeskolen.

Udarbejdet af:
Anders Bonfils 210703
Claus Lorentzen 210721
Kim Jørgensen 210816

Indledning

Problemformulering

Hvilke grundlæggende aspekter findes der i arealbegrebet.
Hvordan kan eleven tilegne sig dette, med udgangspunkt i en konstruktivistisk tankegang?
Hvilke argumenter kan der fremføres for at arbejde/ikke arbejde med areal i folkeskolen, og hvornår er det, set med vores øjne, hensigtsmæssigt?

Afgrænsning af arealbegrebet

Da vores opgave skal have relevans for undervisning i folkeskolen og antage en størrelse der er realistisk, vil vi afgrænse arealbegrebets udstrækning i denne opgave. Det betyder, at vi kun vil forholde os til plane flader og kun til figurer der er præcis 2-dimensionelle. Om end integralregning er ophav til mange formler til bestemmelse af arealet, vil dette begreb dog kun blive anvendt som begreb.

Arealbegrebets historiske begrundelse

Herodot (ca. 484 – ca. 425 f. Kr.) skrev om sine oplevelser i Ægypten:
Det var ifølge præsternes udsagn denne konge, der udstykkede jorden til ægypterne, idet han tildelte hver en firkantet lod af samme størrelse, og han byggede sine indtægter på dette ved at påligne dem en årlig afgift. Hvis floden tog noget fra en mands jordlod, henvendte han sig til kongen og meddelte, hvad der var sket. Denne sendte så synsmænd ud, der skulle måle op, hvor meget mindre stykket var blevet, for at besidderen i fremtiden kunne svare afgift i forhold hertil. Jeg mener, at dette var anledningen til, at landmålerkunsten blev opfundet, som siden er kommet til Hellas.(Jesper Frandsen, 1996, kap 1)

Arealberegningen har været på dagsordenen lige siden oldtiden. Den har taget sit udspring i flodkulturerne i det gamle Ægypten og Mesopotamien, hvor flodernes (Nilen, Eufrat og Tigris) bevægelser gjorde det nødvendigt at kunne måle landet op og kunne beregne arealet rimeligt præcist. Der findes mange skriftlige eksempler på arealberegninger fra den babylonske og den ægyptiske matematik. De var i stand til at beregne arealet af retliniede figurer (kvadrat, rektangel og trekant), men der findes også tilnærmede beregninger af cirklens areal – teksterne giver indtryk af, at disse beregninger har dannet grundlag for konstruktion af kornsiloer og gravning af vandingskanaler.

En ægyptisk skribent Ahmes (ca. 1650 f Kr.) har dette eksempel på beregning af arealet i en cirkel med diameteren 9:

$A = \left(d - d\cdot\frac{1}{9}\right)^2$ dvs. $A = \left(9 - 9\cdot\frac{1}{9}\right)^2 = 64$ Vi kender dog en anden formel for cirklens areal: $A = \pi r^2$

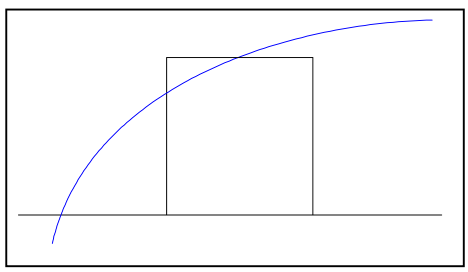
Heraf kan man så sammenligne de to metoder:

$$\left(d - d\cdot\frac{1}{9}\right)^2 = \pi r^2 \qquad \left(2r - 2\frac{r}{9}\right)^2 = \pi r^2 \qquad 4r^2 + 4\frac{r^2}{81} - 8\frac{r^2}{9} = \pi r^2 \qquad 4 + \frac{4}{81} - \frac{8}{9} = \pi \rightarrow$$

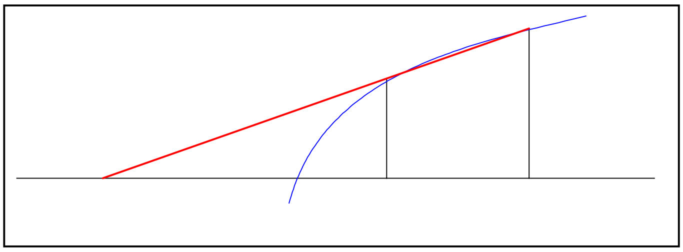
Her bruges altså en værdi af π som er lig 256/81. Havde de brugt den værdi vi kender for π i dag, ville arealet af cirklen med en diameter på 9 blive: 63,6. Så ægypternes bud på 64 var ikke helt ved siden af. Der skrives ikke i teksterne hvorfor ægypterne bruger denne metode, men beregningen er formentlig baseret på erfaring med rumindholdet af cylinderformede beholdere. (Jens Lund, 2000, Indledning)

Fra oldtidens flodkulturer bevægede arealberegningen sig til antikkens Grækenland, hvor matematikken og dermed også arealbegrebet undergik en form for intellektualisering. Det var ikke længere et specifikt samfundsbehov som drev den matematiske tænkning. Arealbegrebet blev behandlet for matematikkens skyld. Her havde man en metode som via Euklidske hjælpemidler kunne omdanne en trekant til et rektangel med samme areal, og dette rektangel kunne så omdannes videre til et kvadrat, stadig med bevarelse af arealet – som man så kunne måle/beregne. Denne metode kaldtes ”kvadratur”(Ibid. s. 11).

Et sidste vigtigt punkt i arealbegrebets historie er personerne Isaac Newton (1642 – 1727) og Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716). Newton og Leibniz står som grundlæggere af integralregningen (Ibid. s. 68), og selvom der var nogen før dem der havde fostret idéen, var det dem som satte den i system og udviklede et sæt standartalgoritmer til at behandle området. De udviklede to forskellige måder at arbejde med integralregning. Newton førte tankegangen fra kvadraturet videre til at være anvendeligt på kurver, så man kunne omdanne området mellem en kurve og en ret linie til et rektangel med samme areal. Leibniz derimod, beregnede integralet udfra arealet på den firkant som i



bund og top var afgrænset af den henholdsvis den rette linie og hældningen (tangenten) på netop denne del af kurven.



I dag er arealberegning en fast del af folkeskolepensum allerede fra 3. klasse, om end anvendelsen af begrebet ikke længere er så tydelig. Der findes efterhånden så få dagligdags anvendelsesområder for arealbegrebet, at man må overveje dets placering og begrundelse i folkeskolesammenhæng.

Pædagogisk/psykologisk ståsted

"Jeg vil betragte mennesket i almindelighed som en slags forskere, ja som en slags personlighedspsykologiske forskere der prøver at få mening i de møder de har med andre mennesker. De er faktisk en slags prototyper på forskere, og deres problem er det, der kendetegner al forskning, nemlig: At gøre en kaotisk verden mere forudsigelig og kontrollerbar, at gøre den i hvert fald: forståelig."(Kresten Bjerg, 1992 kap.2). Det er grundtanken bag den psykologisk-kognitive tænkende teoretiker George Kelly. Han går ind og beskriver den personlighedspsykologiske kognitive erkendelse hos mennesket. *"Hvert menneske udvikler et sæt regler, til at tænke om verden i, og derefter bruger disse regler til at organisere sit liv"*(Kresten Bjerg, 1992 kap 2). Det sæt regler består af konstruktioner af hændelser, som man subjektivt forholder sig til. Motivet for at forstå verden beskriver Kelly følgende: *"At mennesket er født til at være levende, og at de er aktive, fordi de er levende, så behøver vi egentlig slet ikke at forudskikke nogen idé om drivkræfter"*(Kresten Bjerg, 1992 kap.2). Derfor snakker Kelly ikke om motivationsfaktorer, for bare det at være levende er nok - man er født nysgerrig.
Hvis man tager Kelly's grundtanke, så er det, at de konstruktioner man tilegner sig skal sigte imod at skabe mindre kaos. Hvordan man opnår disse konstruktioner er et subjektivt fortolkningsspørgsmål og der kan være mange 'sande' svar, men helt central sigtes der mod, at: *" De begrebsliggørelser, der er mest brugelige, er dem, der øger forudsigeligheden, kontrollen og forståelsen af de hændelser, det drejer sig om"* (Wiggin, Tenner, Clore og Rose 1971).

Ved begrebsliggørelser forstås de konstruktionssystemer man selv konstruerer om en given hændelse, dvs. de erfaringer/erkendelser man opnår er baseret på ens tidligere konstruktioner. Det er så ud fra de løbende konstruktioner, mennesket organiserer sit liv efter og som mål skal rette sig mod forudsigelighed, kontrollerbarhed og forståelighed af verden.

Vi vil nu kigge nærmere på Kellys centrale påstand og enkelte konsekvenssætninger som han udleder der af: *"En persons processer kanaliseres af de måder personen foregriber hændelser"* (Kresten Bjerg,1992 kap.2). Dvs. at måden man opfatter en opgave/menneske/hændelse er individuelt styret af de tanker-konstruktioner, man gør sig om denne opgave/menneske/hændelse. Disse kan så være udslagsgivende i en handling, som kan åbne muligheden for at kunne aflæse en anden persons konstruktioner.

Vi vil ikke lave en slavisk gennemgang af Kellys konsekvenser, men har udvalgt enkelte i en vilkårlig rækkefølge.

"En person foregriber hændelser ved at konstruere deres gentagelser"(Kresten Bjerg,1992 kap.2). Gentagelsen er grundlæggende (ubevidst) for menneskets handlen. Den er hele tiden styret af, og samtidig en afprøvning af, om ens konstruktioner/handlinger holder.

Disse konstruktioner er bestemt af overordnede nøgletemaer, som man fortolker verden ud fra. *"Hver person udvikler et konstruktionssystem, der omfatter et ordenssystem mellem de enkelte konstruktioner og fortolkningsmængder"* (Kresten Bjerg,1992 kap.2). Her kan man give et banalt eksempel, naturvidenskabelig tilgang sat overfor humanistisk tilgang til verden. Hvor den naturvidenskabelige tilgang er præget af et matematisk-logisk nøgletema og den humanistiske tilgang er præget af mennesket som kulturvæsen som dets nøgletema. Deres tilgang til verden er derfor overordnet forskelligt, set udfra deres nøgletema. Det er måske sat lidt på spids her, men hovedpointen er, at der er nogle konstruktioner der vejer mere end andre og ud fra de hovedkonstruktioners indflydelse bliver resten dannet. *"En persons konstruktionssystem er sammensat af et endeligt antal bi-polære konstruktioner"* (Kresten Bjerg,1992 kap.2). For at kunne tillægge sig en konstruktion er man nødt til at kende dets modsætning, for først her er der en ordentlig argumentation for hvorfor man har valgt den konkrete konstruktion. Man er nødt til at se hændelsen fra forskellige vinkler, før man danner en holdbar mening om den. Dette medfører en naturlig refleksion over hvorfor man gør som man gør, og dette finder vi yderst væsentligt om end, at vi er opmærksomme på at dette punkt til tider er dybt overset i menneskers måder at handle på. Den måde man udvælger sine konstruktioner, for at kunne forudgribe fremtiden på, kommer Kelly ind på i hans valgkonsekvens som siger: *"En person vælger selv det alternativ i en tvedelt konstruktion, gennem hvilket vedkommende forudser den største mulighed for udbygning af sit konstruktionssystem"* (Kresten Bjerg,1992 kap.2). Han går herefter ind og beskriver to forskellige strategier,

a) den sikkerhedsorienterede: *"At foretage en videre klarlægning af de konstruktioner, vi allerede bruger"*.

b) den dristige, risikable, eventyrlige: *"At udforske nye aspekter af livet, inddrage helt nye begreber, at udstrække vores konstruktionssystems anvendelighed"*. (Kresten Bjerg,1992 kap.2).

Den sikkerhedsorienterede sigter mod at blive sikker på færre ting, men det gør også at når man møder noget helt nyt, ved man ikke hvordan man skal handle. Man udvikler sig kun i forhold til det kendte.

Den dristige etc. udforsker nye aspekter af livet, men opnår ofte forkerte forudsigelser før han bliver dygtigere til at foregribe de nye hændelser. Man udvikler sig i forhold til at tilegne sig det ukendte, men der kan være omkostninger ved det, idet at man kan 'træde forkert' på vejen. Hvis man træder forkert for mange gange kan det medfører at man blokerer – kører surt i vejen til forståelsen. Hvis man vælger a (jf. ovenstående) får man et snævert men dybtgående kendskab til ens vidensfelt. Hvis man vælger b (jf. ovenstående) får man en bred, men mere overfladisk viden. Vi tror ikke at det er mest hensigtsmæssigt at man befinder sig i enten a eller b. Vi mener at der er en tredje mulighed, hvor man tager udgangspunkt i a men handler som i b. At man arbejder ud fra en sikker base i sit forsøg på at handle i nyt stof.

Kelly postulerer dog følgende: *"En videre forståelse af den verden, vi lever i, kan kun nås ved, igennem nogen tid, at sejle gennem ukortlagte farvande, - risikere uvished og forkerte forudsigelser, indtil vi bliver dygtigere til at foregribe de hændelser, det drejer sig om"* (Kresten Bjerg,1992 kap.2). Vi bliver nok ikke helt enige med Kelly, men langt hen ad vejen kan vi godt se den positive progression i hans postulat.

Endvidere siger Kelly: *"En persons konstruktionssystem ændres efterhånden som vedkommende konstruerer hændelsernes gentagen"* (Kresten Bjerg,1992 kap.2). I og med at vi lever i en verden som er foranderlig, må vi også revidere vores konstruktionssystemer hele tiden – dvs. at ens konstruktionssystem altid vil være ufuldstændigt. Man skal hele tiden være opmærksom på foranderligheden og derfor også indrette sig efter den. Vi fortolker det som det at besidde evnen til omstillingsparathed og anser det som et væsentligt fokuspunkt i denne højteknologiske verden vi lever i. Set med Kellys øjne forklare han det, som at agere som den gode forsker: *”Forsøger at stille sine hypoteser på prøve, forholder sig kritisk til sine egne konstruktioner, - er tilhænger af den eksperimentelle metode”* (Kresten Bjerg,1992 kap.2). Men selv konstruktioner hvis tilgang er anderledes er ikke ubetydelige. *”Men selv konstruktioner, der passer dårligt er bedre end slet ingen konstruktioner, eftersom det eneste alternativ til konstruktioner er kaos. Intet mindre!”*(Kresten Bjerg, 1992 kap.2). Dvs. at for at kunne forstå verden er man nødt til at danne sig meninger om den, og hvis man undlader dette, når man aldrig videre i sin forståelse af verden.

”I den udstrækning en person anvender en erfaringskategorisering som ligner en anden persons, ligner hans psykiske processer denne andens person”. (Kresten Bjerg,1992 kap.2). Det er Kellys fællesskabs-konsekvens som går ud på, at to mennesker som har en vis overensstemmelse i konstruktioner, har større mulighed for at forudsige og forstå hinanden. Dvs. at folk fra samme sociale lag har bedre betingelser for at forstå hinanden. Det være sig sprogmæssigt, tankemæssigt, socialtmæssigt osv. Det er et postulat vi er enige med Kelly i, men man kan stille spørgsmålstegn ved, om det er det eneste han mener med fællesskab? At der kun opstår fællesskab idet at ens forståelse ligger tæt op af en anden persons forståelse. I snævert tilknytning til ovenstående citat snakker Kelly om at indtage en positiv forståelig rolle overfor andre: *” I den udstrækning en person konstruerer en anden persons konstruktioner, kan han spille en rolle i en social proces, der involverer den anden person”* (Kresten Bjerg,1992 kap.2). Det sociale fællesskab skal hos Kelly findes i den rolle som han definere her: *” En psykologisk proces, der resulterer i bestemte adfærdsmønstre, der er baseret på, at man gør sig begreb om de begreber som de mennesker har, med hvem man er engageret i en social opgave”* (Kresten Bjerg,1992 kap.2). Det at kunne sætte sig ind i en persons tankegang, og ud over sin egen, er en vigtig del af et socialt engagement. Man behøver ikke nødvendigvis at være enig, men det kan være med til at åbne for nogle muligheder/konstruktioner man ikke selv før har tænkt over, og måske føre til en eller anden form for forståelse af et givent problem.
Vi ser mange positive træk i Kellys teorier, men der er et enkelt områder som vi må stille spørgsmålstegn ved.

Dannelsestanken

Når man gennem sit syn på verden er så subjektsorienteret som Kelly er, mener vi, at det er problematisk at danne nogen til noget. Når man ikke kan definere noget der minder om objektivitet

bliver det svært at definere et dannelsesaspekt. Dermed kan pædagogikken ikke have en intention og mister sit grundlag. *"Det er dog også kun tilsyneladende, at konstruktivistisk pædagogik ikke har en målsætning. Selv den, som siger at han ikke har noget mål, har jo allerede i kraft af, at han har sagt dette et mål. Den, som ikke vil føre børnene mod forud fastlagte mål, men vil lade børnene finde hver deres mål, har også et mål med sit pædagogiske virke, nemlig at lære børnene en grundlæggende subjektivitet og relativisme".(Carsten Hjorth Pedersen, 2002, s.198)*
Eleven er altså selv ansvarlig for dannelsen og dens udvikling, dette kan til nød accepteres. Det der i dette tilfælde bliver problemet er, at man ikke danner sig i fællesskab med andre, på den rigtige måde. Det menneskesyn der lægger bag Kellys teori er for os at se dybt forankret i egoisme. Alt hvad subjektet foretager sig er begrundet i at øge ens egen forudsigelighed. Enhver interaktion med et andet menneske er drevet af, at udvide sin egen horisont. Medmennesket bliver således kun en brik i ens egen søgen efter forudsigelighed – kan medmennesket ikke udfylde den rolle, er det menneske uinteressant. Det gælder om at udvide min og ikke andres horisont.

Arealbegrebet

Definition af arealbegrebet

Et måltal, der udtrykker en plans 2-dimensionelle udstrækning. (Matematisk opslagsbog, 1996)

I denne definition er der to områder som vi vil sætte fokus på:

- Et måltal
- En 2-dimensionel udstrækning.

Dimension og enheder

Når man skal arbejde med begrebet areal i folkeskolen er der især to områder som vi i praktikken, og andre ligeså (Christensen og Jensen, 1999), har observeret som værende problematiske. Disse er:

- Dimensioner.
- Enheder.

Dimensioner

At leve og handle i et 3-dimensionelt rum er for de fleste uproblematisk. Det kan man gøre uden at vide at man befinder sig i et sådant rum. Når barnet kommer i skole, begynder man så at adskille

disse dimensioner. Først ser man på det 1.dimensionelle plan. Man lære at måle med lineal, og for at dette lykkes, er det ikke nødvendigt at beskæftige sig med dimensioner. Der er umiddelbart en god tilknytning til talbegrebet. Når eleverne så støder på begrebet areal går de en dimension op, men denne gang kan man ikke uden videre forbigå dimensionsproblematikken. Den ekstra dimension får nemlig konsekvenser for resultatet. Det eleven har været vant til at måle er længder, og ofte vil det stadig være længder (side og bredde) der måles. Ganske usædvanligt kommer der dog ikke længder ud af beregningen. Hvis man ikke forstår dette, bliver man matematisk sprogligt og forståelsesmæssigt hæmmet.
Vi mener, at det er vigtigt at eleven har en dimensionsforståelse når man begynder at sætte måltal på arealbegrebet. Det giver mulighed for en forståelse af, hvad det er der kommer ud af ens beregninger eller målinger. Det kræver altså et vist abstraktionsniveau at arbejde med måltal og areal. Dette er begrundet i egne erfaringer samt følgende citat: *"Jeg synes bare, at beregningen hører hjemme på et senere tidspunkt, når plan-, rum- og hyperrum- fornemmelsen er godt grundlagt, og når det nødvendige regneværktøj er grundlagt."* (Groðe, 1999, s.12)

Begrundet i Piaget vil sammenhængen mellem måltal og arealbegreb tidligst kunne komme på tale fra teenagealderen når eleven går ind i de formelle operationers fase. (Egidius, 2002, s. 93)

Enheder

Dette område vokser ud af dimensions problematikken. Hvis man ikke ved, at man skifter dimension, hvordan skal man så kunne vide noget omkring de enheder, der pludselig dukker op når man tæller firkanter (Sigma 2.kl). De anvendte enheder dukker ofte frem som stampet op af jorden (Sigma 2.kl), fordi de introduceres på et tidspunkt, hvor eleverne ikke befinder sig i de formelle operationers fase, og derfor er ude af stand til at håndtere begrebet.
Vi ser her yderligere en problematik. I klare mål skal eleverne efter 3. kl. have: *arbejdet med enkel måling af afstand, flade, rum og vægt.* (Klare mål, 2002), samtidig skal de på multiplikationsområdet kun have: *arbejdet med forberedende multiplikation* (Klare Mål, 2002). Potensbegrebet indgår end ikke i klare mål! Det som vi ser som et problem er, at eleven ikke har fået de redskaber der skal gøre det muligt, at forstå hvorfor enheden er som den er, og hvad der sker når man multiplicerer enheder sammen. Dette forvirrer begrebet unødvendigt.
Dette åbner også en diskussion af, hvilke enheder der skal startes med når man introducerer arealbegrebet. Vi vil her gerne henvise til Matema for 2 kl. Man vælger her at fokusere på en ikke

navngivet enhed og på dens evne til at fylde den figur ud, som skal måles. Man måler simpelthen i enheder (figurer) kort og godt. Dette mener vi er acceptabelt, idet der ikke er grundlag for at indføre cm^2, og samtidig kan dette bedre forsvares, hvis man ikke vil arbejde med dimensioner. Samtidig giver denne type opgaver mulighed for, at arbejde med et væsentligt aspekt ved areal, nemlig at det er en flade som dækker et bestemt område. Når eleven på et tidspunkt ved, hvad potensregning er, kan man gå over til de officielle betegnelser og samtidig arbejde med standard enheder. Et ikke uvæsentligt emne, hvis man engang vil lande på Mars! (Jens Martin Knudsen, fysikforelæsning, 1999)

Hvorfor lære om areal? Valide og invalide begrundelser

Disse overvejelser sætter nogle helt naturlige grænser for, hvad og hvornår man kan beskæftige sig med arealbegrebet i matematik, hvis man kun vil arbejde med faglige emner ud fra deres anvendelse i hverdagslivet. Der er en generel ide om, at matematik som fag skal begrundes i anvendelighed – eleverne (forældrene) spørger: Hvorfor skal vi lære det? Hvad kan vi bruge det til. Disse spørgsmål bliver dog sjældent stillet til undervisning i areal, da man har en fornemmelse for, at det er et af de begreber i matematikken som reelt er direkte brugbart ude i virkeligheden.

Men hvor bruger vi arealmål i dag? For os at se gælder det generelt kun der, hvor den fladedækkende enheds form og areal, er ubetydeligt i forhold til selve den flade den skal dække. Dette kunne være maling på en flade eller såkorn på en mark. At dette skulle være begrundelsen for at lære areal er efter vores mening ikke tilstrækkelig.

Et måske bedre argument kunne være, at arealbegrebet finder stor anvendelse, når mange elever senere i deres studietid støder på begrebet integralregning. Dette drejer sig netop om arealer og summering af disse. Her vil et tidligere arbejde med arealer som summation klart være en fordel for forståelsen af begrebet bestemt integral.

Et andet argument for at lære areal kunne også være, at man muligvis senere støder på begrebet optimering, som nok er det sted, hvor arealbegrebet kommer mest til sin ret. Her er det vigtigt at have et dynamisk arealbegreb, samtidig med at man kan opstille algebraiske udtryk for et areal. Optimering er en væsentlig bestanddel af de overvejelser der foretages ved konstruktion af bygninger, bygningsværker og beholdere af diverse art.

De ovenstående argumenter må antages at ramme en mindre del af befolkningen, og kan derfor ikke være tungtvejende argumenter for arealindførelse i skolen.

Et godt argument finder vi i psykologien. Hvis man er tilhænger af Kelly, vil man mene at hovedbegrundelsen for at undervise i areal (og alt andet for den sags skyld) må være at begrebet overhovedet eksisterer.
Et andet godt argument for at arbejde med areal i skolen skal ses i forbindelse med den almene dannelse. At blive dannet som menneske kan defineres som at kunne forholde sig til sin omverden. Her er det ikke nok at kunne tale humanismens "sprog", det giver kun halve sandheder om det at være menneske. Matematikken og naturvidenskaben som helhed, er et sprog man har brug for at kunne tale og forstå på lige fod med ens modersmål. Almendannelse, evnen til at kunne begå sig i samfundet, implicerer i høj grad matematik, da man i hverdagen, på arbejdet og i samfundet finder matematik. Man kan ikke i et højteknologisk samfund leve foruden matematiske kundskaber. Sproglige færdigheder er et krav for det socialt fungerende menneske, men burde *"numeralitet",* matematiske færdigheder, ikke også være et mål for det socialt aktive menneske. Morten Blomhøj nævner Tine Wedege som teoretikeren bag numeralitet. "*Numeralitet er på samme måde som grundlæggende sproglige færdigheder og kompetencer afgørende for det enkelte menneskes socialisering i kulturen."* (Morten Blomhøj, 2000) Heri ligger hele den naturvidenskabelige dannelsestanke. Arealbegrebet er i sig selv et af de steder, hvor der er stor fare for "sprogforvirring". Vi tænker her på enheder, dimensioner og sammenhæng mellem areal og omkreds.

Et argument som kan være tvivlsomt er argumentet om, at arealbegrebet er velegnet som illustration på, hvad multiplikation går ud på. Ofte indføres arealbegrebet allerede i 2 eller 3 kl. netop med det formål, at kunne forklare multiplikation. (Steen Groðe, 1999, s.12). Vi vil her se på nogle aspekter I dette.

- Man indfører potensbegrebet for at introducere multiplikation! (ibid).
- Ved at kombinere areal og multiplikation må man sætte tal på arealet. Dette er kritisk, idet eleven ikke er i stand til at forholde sig til betydningen af disse tal, se afsnit omkring dimension og enhed.
- Arealbegrebet er langt hen ad vejen ikke anvendeligt ved udelukkende at se på måltallet. (Ibid.). se også 1.argument for areal i skolen.
- Der er mange forståelsesmæssige områder af arealbegrebet, som man på dette tidspunkt ikke kan arbejde med. Vi vil her henvise til ovenstående afsnit om dimension og enheder. Det for os at se mulige arbejdsområde er areal som fladedækning af forskellige figurer uden mål,

men dette er ikke tilstrækkeligt for at anvende arealbegrebet til multiplikation. (Bl.a. Matema 2.kl arbejdsbog)

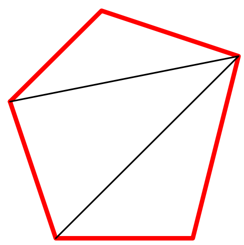
- Er det acceptabelt rent illustrationsmæssigt? Umiddelbart virker illustrationen jo udmærket, men den bryder sammen så snart de negative tal kommer i spil. Her må man altså finde på andre forklaringer og illustrationer. Kritikken kan fastholdes, idet multiplikation udmærket kan forklares uden brug af arealbegrebet og denne illustration holder helt igennem. (ibid).

Hvordan arbejde med arealbegrebet?

Når man i skolen skal arbejde med begrebet areal, er der flere måder at angribe dette på. Vi vil her se på to af dem, og samtidig argumentere for værdien i de to metoder. Begge metoder tager udgangspunkt i trekanten.

Areal som beregning og summation

Der er givet en n-kant, hvor n>3 og man skal beregne arealet af denne. Man vælger i denne metode at dele n-kanten op i (n-2) trekanter og summere arealer af de (n-2) trekanter. I denne metode anvender man at arealer er additive. Rent matematisk arbejder man her med diagonaler samt et statisk arealbegreb, hvor man anser arealet knyttet til én bestemt figur.



Det som for os at se er det brugbare i denne metode er, at den lægger op til begrebet; det bestemte integral, som en del elever senere i livet vil støde på. Her introduceres integralregning som addition af et endeligt antal små arealer som fladedækker en figur. Endvidere er metoden en fortsættelse af fladedækningstanken. Vi mener dog, at denne metode giver et for snævert syn på begrebet areal. Derfor vil vi gerne introducere endnu en metode at arbejde med areal på.

Areal som omformning af figur (L:\GR\2000.08\2aar\japan.rm)

Der er givet en n-kant, og man skal bestemme arealet. Man vælger i denne metode at omforme figuren fra en n-kant til én trekant. Dette gøres ud fra matematiske begreber som

Fig.1

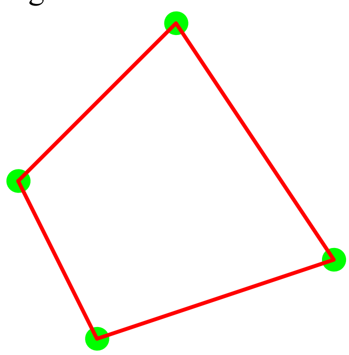
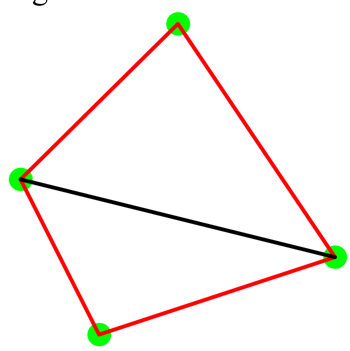


Fig.2



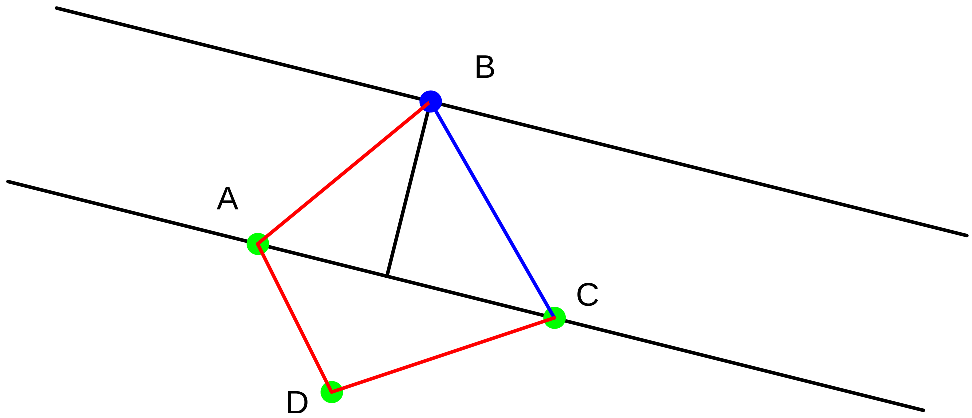
parallelforskydning, diagonaler og normaler.

I det viste eksempel har man en firkant (fig.1) I denne firkant tegner man en diagonal (fig.2) som deler firkanten i 2 trekanter. Indtil videre er der ingen forskel på de to metoder.

Næste trin er nu, at man parallelforskyder diagonalen så den går gennem et af de to punkter i figuren, som ikke gennemløbes af diagonalen.(fig.3)

På denne figur er diagonalen yderligere blevet forlænget, og der er tegnet en højde (normal) så man bedre kan se, hvad der nu sker. Ideen er så, at man forskyder højden indtil man har dannet én trekant af *hele* figur ABCD. Da højden bevæger sig mellem 2 parallelle linier og grundlinien af den trekant [ABC] der ændres forbliver den samme, vil arealet også være uforandret. På figuren kan man prøve dette ved at dobbeltklikke på figuren, markere den blå linie og flytte på det blå punkt. (dette kræver at man har installeret smartsketch)

Fig.3



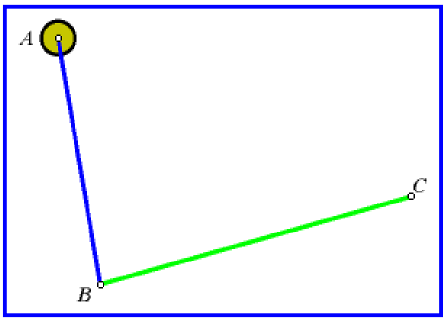
Rent matematisk arbejder man her med et dynamisk arealbegreb, hvor man fastholder arealet, men ændrer på omkredsen, vel vidende at omkredsen kun har den funktion, at agere rand for fladen man ønsker at bestemme. Det for os at se væsentlige ved denne metode er, at den giver en bevidsthed om, at der ikke umiddelbart er nogen sammenhæng mellem omkreds og areal samt, at der til et areal ikke er knyttet en bestemt figur. Areal er altså et i mange sammenhænge ikke entydigt brugbart resultat. Når metoden lægger op til, at figurer kan ændres, men samtidig fastholde nogle egenskaber, lægger dette også op til begreber som maksimering og minimering. Hvordan ser en figur med et fastlagt areal ud, hvis den skal have mindst mulig omkreds? Her bliver matematikken knyttet til hverdagen. Den forklarer naturfænomener og den lægger op til eksperimenterende metoder. (http://www.uvm.dk/klaremaal)

Planimeteret, den pudsige detalje?

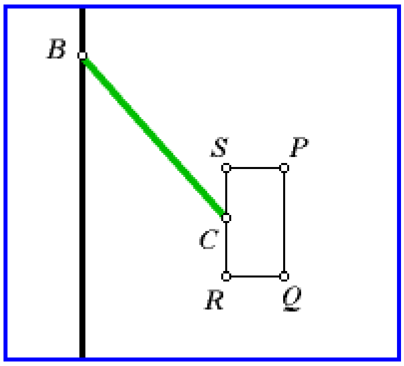
NB: De illustrationer med blå kant har links til Kunkels hjemmeside om planimeteret og er interaktive, hvis din

browser kan vise java. Ligesom illustrationerne, er beskrivelser af planimeteret udseende, funktionalitet og teorien bag, fra hjemmesiden: ”The Planimeter” (http://whistleralley.com/planimeter/planimeter.htm).

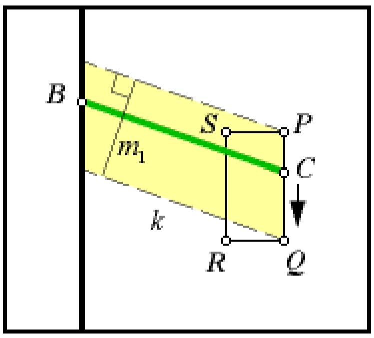
Det er en ofte udtalt påstand, at arealet af en figur ikke har noget at gøre figurens omkreds (når man lige ser bort fra cirklen). Der findes dog et instrument, som udfra omkredsen af en figur kan måle arealet: Et planimeter. Planimeteret består af 2 arme [AB] og [BC], hvor enden [AB] sidder på en cylinder som er fæstnet til et punkt (A). Armen kan drejes om cylinderens midtpunkt, men ikke flyttes. Hvor de 2 arme er sat sammen (B) er der et målehjul som sidder vinkelret på [BC]. Hjulet kan både glide og rulle, og gør ved enhver bevægelse begge dele samtidig. Derved måler hjulet, hvor langt [BC] bevæger sig vinkelret på egen retning, som både kan være positiv og negativ alt efter om hjulet kører den ene eller anden vej.

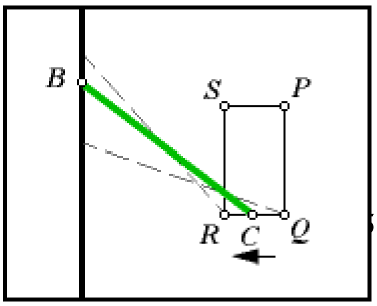


Planimeteret fungerer ved, at man trækker punktet (C) med uret langs figurens omkreds. Derefter aflæses tallet på målehjulet og multipliceres med længden af armen [BC]. Herved findes arealet af figuren.
Når planimeteret bevæger sig, drejer [AB] rundt om det fikserede punkt (A) som et kompas, mens punktet (B) tegner cirkler i planen. Hvis man så lader længden [AB] gå imod uendelig, vil (B) gå fra at bevæge sig i cirkler til at bevæge sig på en ret linie.
På de følgende illustrationer, vil planimeterets tur rundt i firkanten [SPQR] være illustreret.



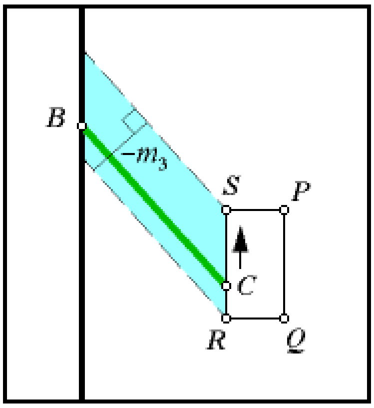
Når (C) går fra (P) til (Q) trækkes den grønne arm hen over det gule parallelogram. Da hjulet sidder vinkelret på armen og både ruller og glider samtidig, måler det højden af parallelogrammet m_1. Vi kalder længden af armen [BC]: k, herved vil arealet af det gule parallelogram være km_1



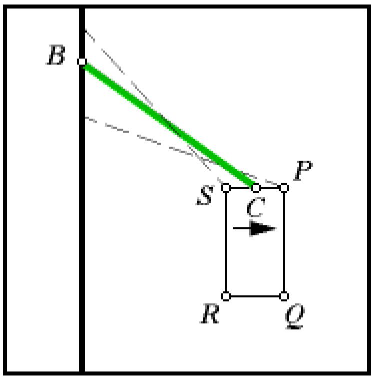


Når (C) trækkes fra (Q) til (R), kan man ikke se, hvilken effekt det har for arealet, men vi kalder målingen m_2 og gemmer den til senere.

Så trækker vi (C) fra (R) til (S) og får igen et parallelogram, men denne gang med en negativ højde $-m_3$. Her vil arealet af det blå parallelogram være $-km_3$.



På den sidste tur fra (S) til (P) er det igen svært at se nøjagtig hvad der foregår, men det viser sig at der sker præcis det samme som mellem (Q) og (R) bare med modsat fortegn. Så målingerne m_2 og m_4 går altså ud med hinanden.



Hvis vi så kalder hjulets totale måling efter en tur hele vejen rundt M for vi følgende beregning:

$M = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$

$M = m_1 + (-m_4) + m_3 + m_4$

$M = m_1 + m_3$

Herefter multiplicerer vi med k på begge sider af lighedstegnet:

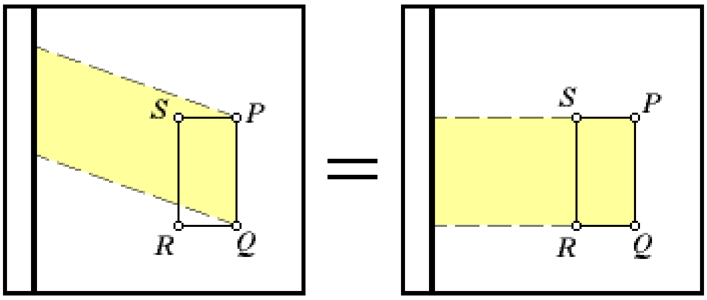
$kM = k(m_1 + m_3)$

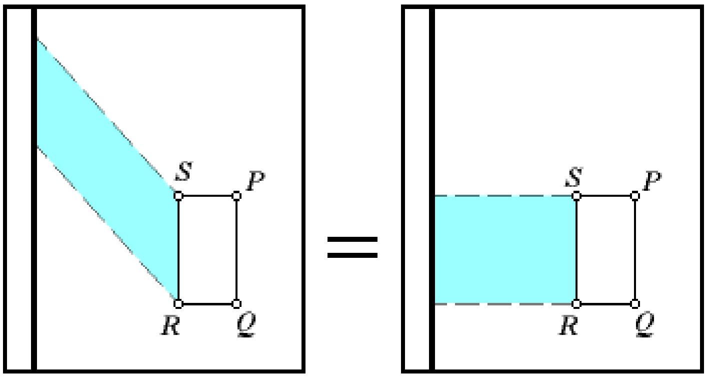
$kM = km_1 + km_3$

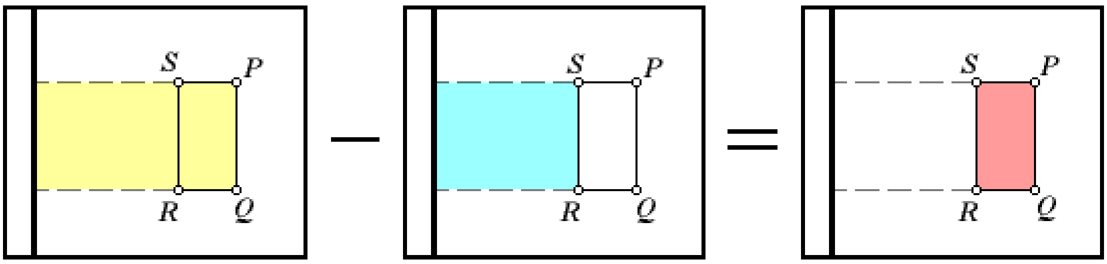
$kM = km_1 - (-km_3)$

$kM =$ [det gule areal] - [det blå areal]

Og hermed har vi arealet af firkanten [SPQR].

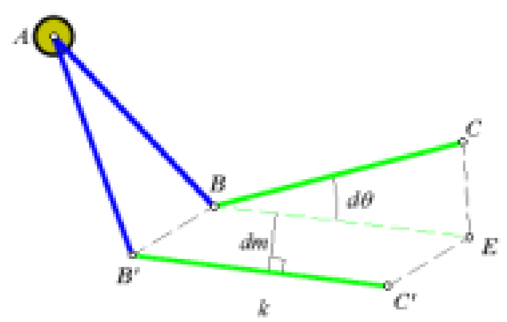






Dette giver en fornemmelse af hvad det er der sker, når man arbejder med planimeteret. Vi skal bare holde os for øje, at beviset ikke arbejder med et normalt planimeter, men det man kalder en ”Amsler integrator”, som primært bruges til at måle tværsnitsarealer i forbindelse med kortlægning af skibsruter. Men hvad sker der så når det er et almindeligt (polært)

Fig.4



planimeter, og en irregulær figur? Der sker faktisk noget af det samme – der bliver stadig målt højder i en masse forskellige parallelogrammer, som så bliver trukket fra hinanden. Endvidere fremkommer nogle trekanter, hvis areal, i lighed med bevægelsen (Q) til (R) og (S) til (P) i ovenstående eksempel, til sidst viser sig at være nul, og dermed irrelevant. Arealet af trekanterne bliver regnet ud på baggrund af *ændringen* i armens vinkel dθ, som efter en tur hele vejen rundt i figuren er tilbage i udgangspunktet og derfor nul. Beviset for det står på hjemmesiden der refereredes til tidligere.

Implikationer for vores arealtænkning

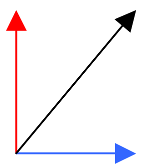
Hvad skete der med arealets uafhængighed af omkredsen? Har planimeteret snydt, eller er der alligevel en sammenhæng?

Det er vigtigt at bemærke forskellen imellem omkredsen som et længdemål og omkredsen som en rand der afgrænser et bestemt areal. Planimeteret beskæftiger sig med randens form og ikke randens længde. Der er ikke nogen sammenhæng mellem længden på en figurs omkreds og samme figurs areal, til gengæld er der en sammenhæng mellem formen på figuren og dens areal, hvilket planimeteret udnytter.

Det der reelt sker når planimeteret tager en tur rundt i figuren er, at figurens form bliver topologisk omformet til et rektangel med samme areal, hvor grundlinien er lig armen [BC]'s længde og planimeterets målte afstand er højden.

Dette kan anskues ved en analyse af planimeteret med vektorer.

Fig.5



På fig.4 har planimeteret bevæget sig et lille stykke fra B til B´. Denne bevægelse er sammensat af en glidning og en rulning, og kan anskues som en vektor. Dette billede ses på fig. 5. Den sammensatte vektor (den sorte) kan så splittes op i en ren rulningsvektor (den røde, som er vinkelret på armen [BC], og en ren glidningsvektor (den blå). Når planimeteret er kørt hele vejen rundt om figuren, findes der et endeligt antal vektorrepræsentationer af dets mange små bevægelser. Disse sættes sammen og den resulterende rulningsvektor, som ikke er lig med omkredsen af figuren (den sorte), bliver normalen i et rektangel med samme areal som den netop omkredsede figur.

Vi vil her overlade det til senere projekter, at beskæftige sig med planimeteret og dets principper i folkeskolen.

Vores bud på en måde at indføre arealbegrebet i FSK.

Ud fra ovenstående overvejelser omkring arealbegrebet, vil vi foreslå følgende progression i folkeskolen. Ideen er, at emnerne introduceres på det klassetrin de er nævnt under, men at man arbejder videre med det i de efterfølgende år.

Progression

Indskoling

3.kl.

Fladedækning.

Det som vi vil arbejde med her er, at figurer har en 2-dimensionel udstrækning som gør at de dækker et vist område (Aktivitet, Frøen). Vi tager udgangspunkt i simple figurer og dækker flader med dem. Dernæst vil vi arbejde med spørgsmålet: Hvilke figurer dækker hinanden? Hvordan kan man sammensætte/opdele figurer til andre kendte figurer. Det væsentlige er, at se at en firkant kan deles i 2 trekanter.

Derefter udvider vi med at man kan tage udgangspunkt i et givent polygon og undersøge opdelingen af dette. Hertil kunne man fint anvende tangram brikkerne.

http://www.tangram.i-p.com/

http://www.kidscom.com/games/tangram/tangram.html

Mellemtrin

4.kl.

Unitstanken.

Vi skal her arbejde med, at man kan måle og opgive en flade i unit (enhedsløse figurer). Det kan være figurer som de selv bestemmer størrelse og form af. Det vigtige er her at vi undgår at sætte dimensioner/enheder på units´ne.

Sømbrætter og omformning af figurer med fastholdt areal.

Her vil vi fokusere på, at der til en flade ikke findes en og netop en omkreds. På sømbræt kan de finde alle figurer som kan måles/bestemmes til at være X units og dette kan derefter føre til mange spændende undersøgelser.

5.kl.

Sammenhæng mellem trekanter og rektangler gennem sømbræt aktiviteter.
Det væsentlige er at sikre, at alle erkender, at et rektangel består af to trekanter, som deler figuren i 2 lige store dele. Dette skal ske uden at der inddrages formler, men ved at det erkendes gennem aktiviteter på sømbrættet. (Aktiviteter, Sømbrættet)

At omforme en figur til en anden med fastholdelse af areal.
Nu vil vi introducere den japanske model på computer. Det er derfor vigtigt, at de netop har erkendt, at en trekant med fastlåst grundlinie og højde, kan bevæges i et rektangel uden at ændre areal. Vi mener, at dette er muligt på nuværende tidspunkt uden kendskab til formler. Samtidig giver metoden et modspil til den tidligere lærte metode om at opdele en figur i andre figurer. Nærmere forklaring af metoden er givet på s.13.

6.kl.

Standard enheder.
Vi forestiller os, at inden vi indfører standardenheder i 2. potens, har vi haft algebraiske forløb omhandlende kvadrattal og begyndende potensbegreb. Dette er grundlæggende for børnenes oplevelse af, hvordan enhederne opfører sig når der skiftes dimension fra længder til flader og omvendt. Til dette er der knyttet standard enheder, som eleven gennem arbejdet skal indse er vigtige for kommunikationen. Det der skal læres er, foruden kendskab og fortrolighed med terminologien indenfor flademål, at der er forskel på måltal i anden potens og enheder i anden potens. Det for eleverne væsentligt er, at de skal opdage det at gå fra en dimension til en anden ved enhedsregning.

Simple formler, trekant, firkant.
Der udvikles formler til de simple figurer ud fra egne erfaringer med sømbræt eller computervirksomhed. Måltallet indføres som led i beskrivelsen af hvad areal er. Nu ses arealet som en tal knyttet til en flade.

Overbygning

7.kl.

Videreudvikling af dimensionsbegrebet, angående enhedsskift i 2. potens (ex. fra m^2 til cm^2), hvad sker der med måltallet? Vi skifter ikke dimension, men pga. af at vi er i et 2-dimensionelt univers, opfører måltallene sig anderledes.

Udvidede Formler.

Her stifter vi bekendtskab med formler der ligger ud over de simple formler. Vi vil beskæftige os mere med trekanter og bestemmelse af deres areal. Vi slipper fokus på at dele figurer op og anvender i stedet givne og egne udviklede formler, hvor det er muligt. Begyndende algebraiske argumenter udvikles.

8.kl.

Dimensioners indflydelse på hinanden.

Vi vil beskæftige os med hvordan dimension 1 og 2 påvirker hinanden i forhold til arealet på en given figur og bestemme sammenhængen.

Arbejde med omkreds og areal på algebraisk niveau.

Vi vil arbejde med areal og omkreds i forhold til hverdagen, gennem problemløsningsopgaver. Det som eleven her skal lære er rent algebraisk at kunne argumentere for at der ikke er nogen sammenhæng mellem omkreds og areal.

9.kl.

Historik og kvadratur.

Her vil vi beskæftige os med areal i historien og derunder komme ind på kvadratur af forskellige simple figurer.

Optimering.
Hvordan kan man få det største areal ud af en given situation eller figur. Hvilken betydning har areal i den fysiske verden. Sæbebobler, radiatorer og tepotter. (Aktiviteter, De skide høns)

Aktiviteter

Frøen

Aktivitet:
Hver spiller får en plade med 3 figurer på og et sæt brikker som kan dække de 3 figurer (se bilag). Man skiftes til at lægge en brik på figuren. Brikken skal lægges hjørne mod hjørne og kant mod kant. Man må ikke lægge brikker oven på hinanden. Man får 1 point for hver brik man lægger. Den der ligger den sidste brik på hver figur får en ekstra bonus på 2 point. Vinderen er den der har flest point.

Målet med aktiviteten:
Det primære mål med spillet er, at få eleverne til at erkende, at en given figur kan fladedækkes på forskellige måder. Derudover findes der flere mål som f.eks., at finde den rigtige strategi hvorved man opnår flest point, som man kan tillægge spillet.

Videreudvikling af aktiviteten:
Efter at have spillet spillet, kan man udvide aktiviteten ved at eleverne selv skal producere deres egne plader med dertilhørende figurer og brikker. Uden for arealbegrebet kan man også arbejde med at eleverne skal opstille deres egne regler for spillet, samt undersøge om der er en endegyldig strategi for at vinde spillet.

Didaktiske overvejelser:
Spillet bliver udleveret, og eleverne bliver delt i grupper af 2 hvor de spiller en mod en. I denne fase får eleverne dannet nogle egne erfaringer med spillet. Herefter vil vi inddele eleverne i grupper af fire, hvor de går sammen to og to. Dette giver dem mulighed for samtale omkring spillets aspekter, og vi ser det som en udvikling, hvor eleverne byder ind med deres forskellige

kompetencer/kvaliteter. Det bliver her en fælles læreproces, hvor eleverne bliver gjort opmærksomme på, at de også kan benytte hinandens viden til videre forståelse. Her går vi mod den rent konstruktivistiske tankegang. Man skal se gruppearbejdet som en udveksling af viden omkring problemet. Herefter deler vi eleverne op igen i grupper af to hvor de spiller en mod en. Denne fase ser vi som ekspertfasen, hvor eleverne skal bruge deres viden de har erfaret på egen hånd og gennem gruppearbejdet. Nu åbner vi opgaven op i Fielkers ånd hvor eleverne nu skal konstruere deres egne spil. Her kan de gå vidt forskellige veje, og forfølge deres ideer til ende og opsætte deres egne spilleregler. Her vil eleverne erfare, at det ikke er lige meget hvordan spillet konstrueres, her skal pointeres at vi som lærere ikke skal gå ind og styre elevernes tankeprocesser selvom vi er uenige i den retning de tager. *"If you are interested in the children having ideas, then you will need to foster these ideas."* (Fielker, 1997 s. 25). Dernæst er det tanken, at eleverne skal udfordre hinanden med deres egne konstruerede spil.

Sømbrættet

Aktivitet:

Lav alle de trekanter du kan, som netop dækker 1 firkant på sømbrættet. Hvem finder flest? Hvor mange forskellige mon der er? Kan du finde ting som alle trekanterne har tilfælles?

- Undersøg hvad der sker hvis du prøver med et andet antal firkanter.
- Prøv at lave et rektangel udenom trekanten. Hvor mange firkanter findes der i dette rektangel? Lav en konklusion på denne observation?

Målet med aktiviteten:

At eleverne får et godt billede af, at en firkant kan deles i 2 lige store trekanter, hvis arealsum er lig firkantens areal. Sekundært kan de drage konklusioner omkring sammenhængen mellem længden på trekantens højde og grundlinie.

Videreudvikling af aktiviteten:

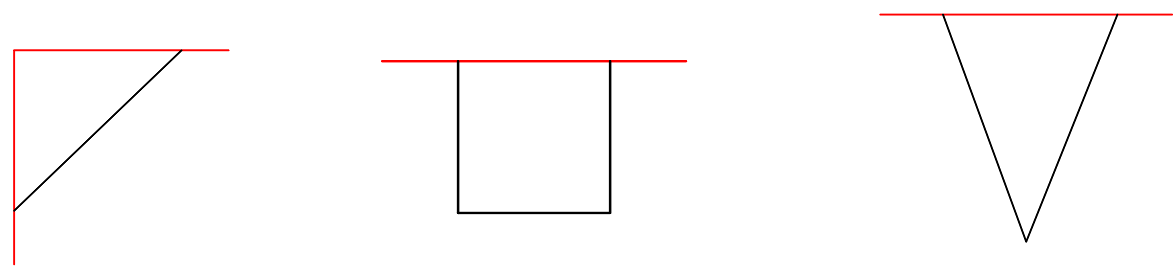
Det er oplagt, at man med afsæt i disse aktiviteter med trekanter og rektangler kan gå i gang med at snakke om parallelogrammers areal. Ex. lave rektangler og parallelogrammer med samme areal og samme grundlinielængde, hvad sker der med højden?

Didaktiske overvejelser:
Aktiviteten sættes i gang og børnene får lov at sidde og ”bokse” med det – det er vigtigt, at de bruger hinanden og sammenligner resultater, selvom der er en lille snert af konkurrencemoment i aktiviteten. David Fielker mener, at man kun kan planlægge begyndelsesaktiviteten af en time, herefter er det børnenes egne idéer der bestemmer udviklingen i timen. Det er helt i tråd med konstruktivistisk tankegang. Vi har dog valgt at lave en aktivitet, som på en måde er inspireret af DF’s idéer, men i højere grad styrer retningen af børnenes arbejde. Dette gør vi fordi vi har et mål med denne aktivitet. Målet er væsentlig for senere aktiviteter: den japanske model.

De skide høns!

En landmand skal lave et hegn til sine høns. Han har 40 meter hegn og han skal lave sider der er et helt antal meter. Han tænker ved sig selv: 15/5 det giver 3, 12/8 det giver 1,5 så vælger jeg 11/9. Hvorfor tænker landmanden som han gør og er han kommet frem til det rigtige ?

Dagen efter slår en tanke ham. Hvis han nu sørgede for at placere marken lige op til hønsehuset, som er bygget af rødsten, så kunne han bruge noget af huset som indhegning. Han har flere muligheder, hvilken vil du foreslå ham? Længderne behøver ikke længere at være i hele metre.



Er der andre muligheder som er endnu bedre?

Formål med aktiviteten:
Formålet med opgaven er, at eleven skal stifte bekendtskab med at arealet på en figur kan optimeres i forhold til omkredsen. Bl.a. vil man kunne se på forholdet mellem siderne for at optimere arealet

af nogle af figurerne. Endvidere kræver opgaven, at eleverne skal kunne vælge hensigtsmæssige metoder til at løse problemet på. Denne opgave er meget praksisorienteret, og derfor skal udbyttet også være, at eleverne senere vil undre sig over figurudformninger de møder i deres omgivelser. Det er ikke muligt at løse opgaverne på algebraisk vis med mindre man binder flere variable, så opgaven skal løses enten på computer eller ved at tegne, måle og beregne. Opgaven åbner til mange andre områder som vi ikke vil komme ind på her.

Didaktiske overvejelser:
Opgaven vil blive stillet og derefter skal eleverne selv vælge løsningsmetoder. Hvad der herefter sker er uvist, idet vi vil arbejde ud fra elevernes idéer (David Fielker, 1997, s.6). Opgaven indeholder mange mulige aspekter som eleven kan arbejde med i sit forsøg på at løse opgaven. I første del af aktiviteten, har vi gjort brug af David Fielkers didaktiske overvejelser: ”*Here´s the rule: Why does it work”*.(Fielker, 1997, s.47). Egentlig ville vi gerne have arbejdet med algebraiske løsninger af optimeringsproblemer, men vi tror, at det bliver for svært for de fleste, idet det ofte vil indeholde trigonometri og differentialregning. Opgaven er dog så åben, at de interesserede elever kan undersøge for dem spændende områder og netop se vigtigheden i frihedsgrader i forhold til algebraiske løsningsmetoder. Herefter kan man så introducere dem for en opgave som rent faktisk kan løses ad denne vej. Til sidst i opgaven åbnes den helt op, så alle figurer kan undersøges i forhold til compactness begrebet (Fielker, 1997, s.124), forholdet mellem omkreds og areal. Man kan derefter sammenligne de forskellige figurer og tage en diskussion om forholdets anvendelse i dagligdagen og udvide til undersøgelser omkring areal og rumfang.

Litteraturliste

Bjerg, Kresten
Ind og ud af personlighedspsykologiske, 4. udgave, Psykologisk Laboratorium, Københavns Universitet, 1992

Blomhøj, Morten
Hvorfor matematikundervisning? – matematik og almendannelse i et højteknologisk samfund Skrift nr. 24, Center for forskning i matematiklæring, 2000.

Christensen, Birthe og Jensen, Henning Schow
Areal på en anden måde, 1999
http://dirac.ruc.dk/~ihp/SKRIFT6.HTM

Egidius, Henry
Pædagogik i det 21. århundrede, Gyldendal, 2000

Fielker, David
Extending mathematical ability, Hodder & Stoughton 1997

Frandsen, Jesper
Ægyptisk matematik, Systime, 1996

Groðe, Steen
Lærerens kundskaber, Matematik nr. 3, 1999

Klare mål: Matematik. 2002.

Kunkel, Paul
The Planimeter, 2002
http://whistleralley.com/planimeter/planimeter.htm

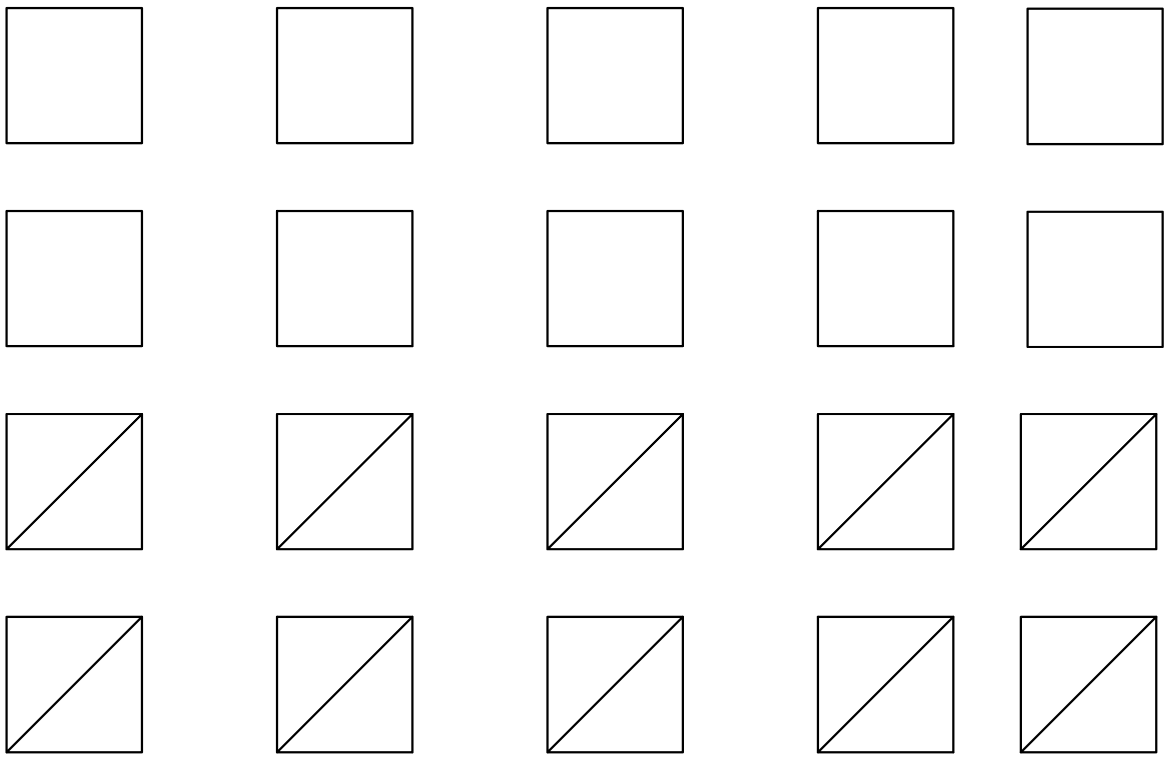
Lund, Jens
Fra kvadratur til integration, Matematiklærerforeningen, 2000

Matema 22, basisbog. - Gyldendal, 1992.

Sigma for anden B. - 1. udgave, 6. oplag. - Malling Beck, 1999.

Bilag

Brikker



Grundfigurer