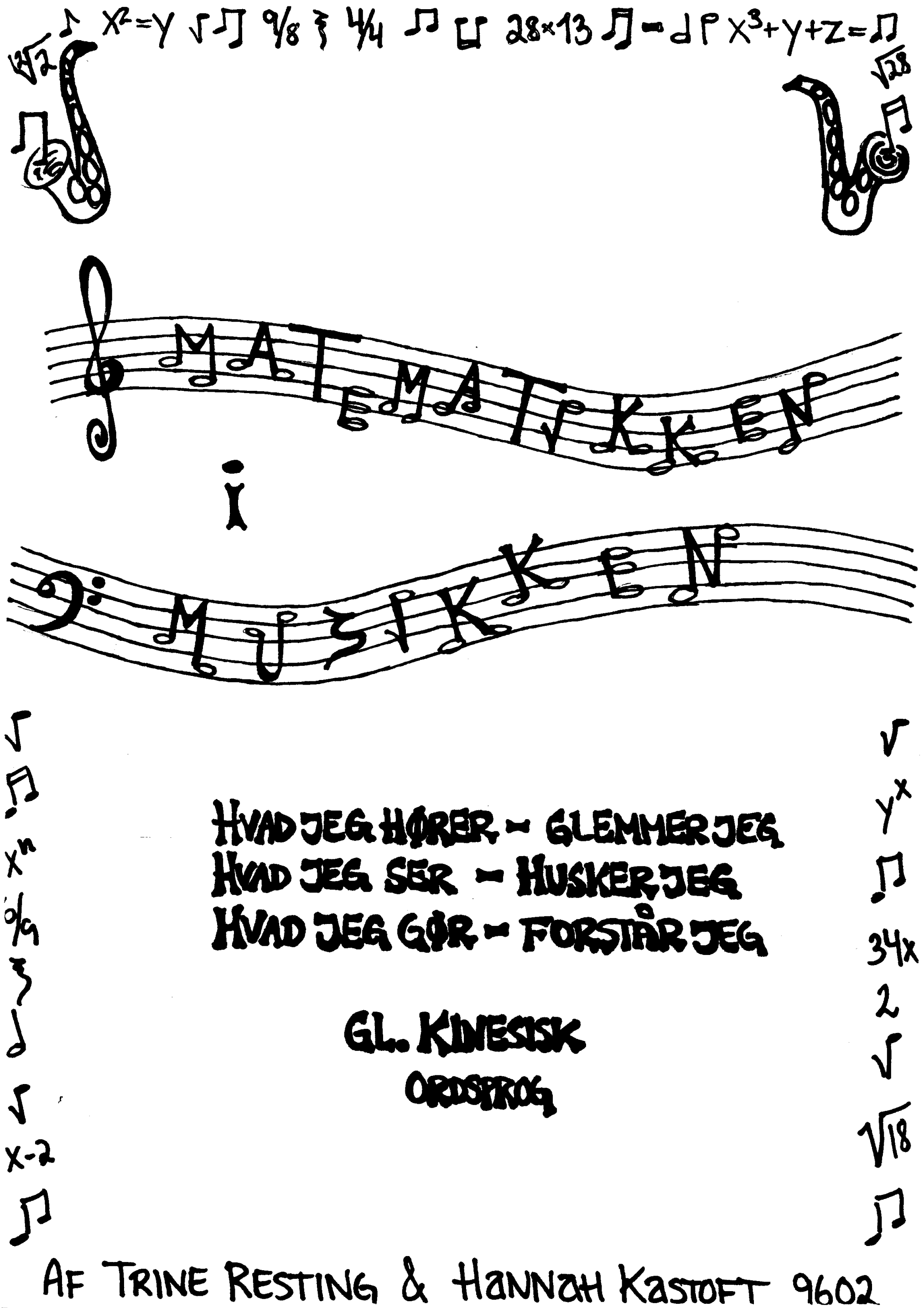


Efter i flere år at have tumlet med idéen om at lade nogle 1. årgangstuderende arbejde med musik og matematik fik jeg i 1996/97 mulighed for at realisere projektet. Jeg fik timer til et udviklingsarbejde inden for den praktisk-musiske dimension, vi fik en håndfuld studerende der interesserede sig for emnet (hvor jeg kendte nogle af dem i forvejen), og i Folkeskolen blev trykt en artikel der fortalte om et samarbejde mellem matematik og musik med hensyn til brøker, som blev den udløsende faktor.

Dette produkt er det ene af de to der kom ud af mit samarbejde med de studerende. Selv om indholdet er de studerendes har jeg under arbejdet med denne rapport ikke helt kunne lade være med at ændre nogle mindre detaljer.

Af min kritik fremgik det at det ikke er paradoksalt at ¼+¼=½ (men måske er det et paradoks, at der er nogen der synes det), at de store regnearbejder der nævnes ikke er store når det hele ligger i et regneark, og at der ikke nødvendig vis er forskel på en rekursiv (implicit) og en eksponentiel funktion. Forskellen ligger mellem en rekursiv (implicit) og en eksplicit funktion.

Endelig må jeg nævne at ingen af de to kvinder havde særlige forudsætninger i matematik og musik. Besvarelsen er således et udtryk for hvad man med god ret kan forvente af nogle 1. årgangsstuderende i matematik.

Steen Groðe

Indholdsfortegnelse.

Formål stk. 2. "Undervisningen tilrettelægges, så eleverne opbygger matematisk viden og kunnen ud fra egne forudsætninger. Selvstændigt og i fællesskab skal eleverne erfare, at matematik både er et redskab til problemløsning og et kreativt fag. Undervisningen skal give eleverne mulighed for indlevelse og fremme deres fantasi og nysgerrighed."[1]

Emnebegrundelse.

Vi har i vores matematik speciale valgt at beskæftige os med et emne, som kunne kaldes: musik set med matematiske øjne, eller matematik set med musiske øjne. "Matematik er overalt"[2]! Med dette i mente tænkte vi, at der måtte være mange muligheder i et sådant emne.

Vi tog udgangspunkt i en artikel, vi havde læst i "Folkeskolen"(Nr. 44, 1996). Artiklen handlede om et tværfagligt forløb mellem matematik og musik og var skrevet og udarbejdet af Lene Christensen (formand for dansk matematiklærer forening) og Joachim Bang. Artiklen beskrev et UV-forløb for 6.-7. klasse, hvori man blandede arbejdet med geometriske figurer, brøker og musik og vi besluttede, at afprøve ideen selv i vores praktik. Her var der blot den forskel, at vi skulle ud i en 2. klasse, men det gjorde det absolut ikke mindre interessant.

Forløbet er beskrevet i første del af denne opgave. Anden del vil bl.a. indeholde forslag til videre arbejde med "kulørte brøker" og andre ideer til, hvordan man kan kombinere matematik og musik. Men først vil der komme nogle generelle fag-didaktiske overvejelser samt pædagogisk-psykologiske overvejelser. Desuden vil hvert afsnit være efterfulgt af nogle, for opgaverne, mere specifikke fag-didaktiske overvejelser.

Generelle fag-didaktiske overvejelser for hele opgaven.

- "Praktisk/Musisk dimension er ikke blot et spørgsmål om aktiviteter, men et spørgsmål om at styrke de æstetiske, musiske, kreative, praktiske og teoretiske sider af elevens evner og anlæg, så de virker sammen, når eleven skal tilegne sig færdigheder og viden."[3]

- Praktisk/Musisk dimension ses således som en udvidet forståelse af elevens måde at lære på, derfor skal der være variation i læringsformer, dvs. hensynstagen til kropslig bevægelse, praktisk fremstillingsform, visuelle og konkrete formidlinger.[4]

- Gennem tværfaglighed får eleverne lejlighed til at opleve matematikkens rolle i bredere sammenhænge.

- "I den intense undervisningssituation bliver vi nødt til ubesværet at kunne associere til andre begrebsdannelser. Ofte lukker elevens forståelse sig op på grund af en lykkelig sammenligning med at andet stofområde. En sådan sammenligning kalder vi metaforisk, og netop i metaforen har vi en mulighed

---

[1] Faghæftet

[2] JF. Lisser Ejersbo: „Matematik er ingen kunst"

[3] Faktor 2, Lærerens håndbog

[4] JF. Faktor 2, Lærerens håndbog

for at kortslutte to forståelsesområder, så det forståede låner sin forståelse til det uforståede."[5]

- "En anden form for indholdsvalg hænger sammen med kravet om at gennemføre en differentieret undervisning, der tager udgangspunkt i den enkelte elevs behov og forudsætninger."[6]

CKF:

- Ved behandling af emner på forskellige abstraktions niveauer og ved anvendelse af forskellige arbejdsmetoder, får eleven, alene eller i samarbejde, mulighed for at udvikle viden og kunnen.

- Eleverne skal opnå et handleredskab over for problemer, der ikke er af rutinemæssig art, og de skal være fortrolige med eksperimenterende arbejdsformer.

- Undersøgelser, systematiseringer og ræsonnementer er bærende for opbygning af matematisk viden og kunnen.

- Matematisk kunnen får en ny dimension når lommeregner og edb indgår som almindelige hjælpemidler.

De næste par citater - overvejelser vedrører undervisningsmaterialer:

- "Hvis man vil fremstille et undervisningsmateriale eller planlægge et undervisningsforløb, således at alle kan gå i gang med det og gennemføre det uden besvær, så vil man let komme til at lave noget, hvor der ikke finder nogen læring sted, kun beskæftigelse. Hvis man ikke er nødt til at tænke, at kæmpe,

[5]Peter Bastian: „Den fremragende undervisning...”

[6]Faghæftet s. 21

-----------------------------Matematikken i musikken---------------------------------

lærer man intet."[7]

- "Det er eleven, der skal handle, det er eleven, der på baggrund af en undren, skal blive nysgerrig og få lyst til at erhverve sig en viden.".....Derfor bliver lærerens opgave: "..at finde noget matematik, som både er vigtigt, har relevans for eleverne, engagerer dem følelsesmæssigt og gerne indeholder kreative elementer."[8] Undervisningsmaterialer skal være meningsfuldt knyttet til elevens hverdag, derved bliver indlæringseffekten meget større.[9]

Pædagogisk- psykologiske overvejelser.

- "Erkendelse handler om sansning, oplevelse og følelse."[10]

- "Det enkelte barn opbygger selv sin viden og kunnen - konstruerer selv sin virkelighed. På baggrund af egne oplevelser og erfaringer."[11]

- "Eleven skal selv være aktiv på mange måder. Børn tænker med hele kroppen og sidder alt for meget ned i skolen. Her starter man ofte med at lære først med hovedet og måske kommer kroppen siden hen med. Børn lærer omvendt, først med krop og hænder og så hovedet, det er grundlaget for dets udvikling."[12]

- "Praktiske eksempler har betydning for, hvor godt vi husker og forstår noget. Eleven gør talrige erfaringer, når der arbejdes med konkrete materialer, disse erfaringer kan så bevidstgøres i sproget. Det talte sprog, forestillingsevnen,

[7]Viggo Hartz: „At stile krav til eleverne.”

[8]Lisser Ejersbo: „Matematik er ingen kunst.”

[9]Lisser Ejersbo: „Personlig læring...” s. 10

[10]Kjeld Fredens: „Matematikkens verdensbilleder.”

[11]Povl Hansen: „Om at undervise i matematik.”

[12]Lisser Ejersbo: „Personlig læring...”

evnen til rationel og logisk tænkning, bygger på kropsbevidsthed."[13]

- "De grundlæggende kundskaber og færdigheder lærer barnet i klassegruppen, i den sociale sammenhæng. Derefter lærer barnet sig at læse gennem sit eget arbejde, dvs. i en individuel eller psykologisk sammenhæng."[14] Altså, først den sociale situation, så den individuelle.

UV-foløb i 2.kl. "*Kulørte brøker*".

Formål:

Vores primære mål med dette UV-forløb var at forberede eleverne til brøkregning. Ifølge TIMSS undersøgelsen er de danske børn generelt dårlige til at regne med brøker (bilag nr.1 og 2 - resultaterne fra TIMSS undersøgelsen, der ikke er med som bilag i denne udgave; Steen). Som Lene Christensen udtrykte det, da vi talte med hende: "Det kan ikke blive værre!" Det kunne tyde på, at den traditionelle undervisning et eller andet sted har en mangel eller er slået helt fejl. Derfor skal der eksperimenteres noget mere og det er baggrunden for "Kulørte brøker."

I faghæftet under faglig-pædagogiske områder vil man kunne læse sig til, at mange lærere har erfaret, at man ofte kan tegne sig igennem et problem, som en elev ikke forstår. F.eks. at en halv er det samme som to fjerdedele. Tegningen skal være en mulig repræsentationsform for alle elever, og kan endda tænkes, at være den der huskes af nogle elever, og som giver handlekompetence på det abstrakte plan, i resten af deres liv.

Paradokset at ¼ + ¼ = ½ og ikke som man kunne antage 2/8, imødekommes gennem det sansede, og bevirker at teorien bliver mere nærværende. Børge Rasmussen siger: „Gennem leg kan du lære alt det skønne, alt det svære", med andre ord: Leg stimulerer indlæringen.

[13] Povl Hansen: „Om at undervise i matematik."

[14] Mogens Hansen: „Intelligens." s. 139 (Vygotskij)

----------------------------Matematikken i musikken--------------------------------

Derudover indeholder forløbet gode differentieringsmuligheder, eleverne ender op med et selvlavet produkt og der indgår motoriske og kreative aktiviteter. „Motorisk aktivitet og kompetence øger social aktivitet, det sproglige fælles-skab og den intellektuelle udfoldelse, fordi personen får mere "mod på livet"."[15]

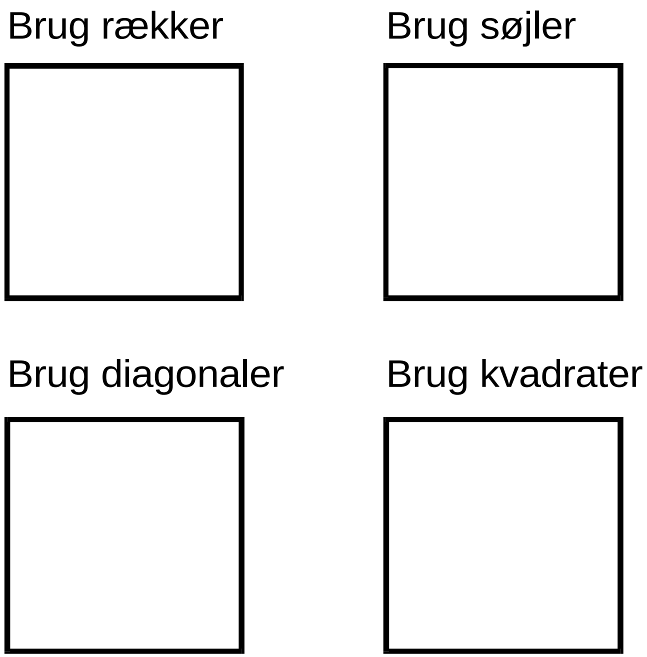
Introduktion.

Før vi kunne gå i gang med den egentlige opgave, at lave kulørte brøker, og for at have et fælles sprog, var det nødvendigt at børnene fik kendskab til begreber som: kvadrat, rektangel og trekant, diagonal, søjle og række, fordobling og halvering, hel, halv og kvart. Nogle af disse begreber var børnene allerede bekendte med og andre (diagonal, søjle og række) havde vi arbejdet med i ugerne forinden (i forbindelse med et bingospil, ©Steen Groðe). De resterende begreber (kvadrat, rektangel, hel, halv og kvart) fik vi sat på plads vha. følgende opgaver:

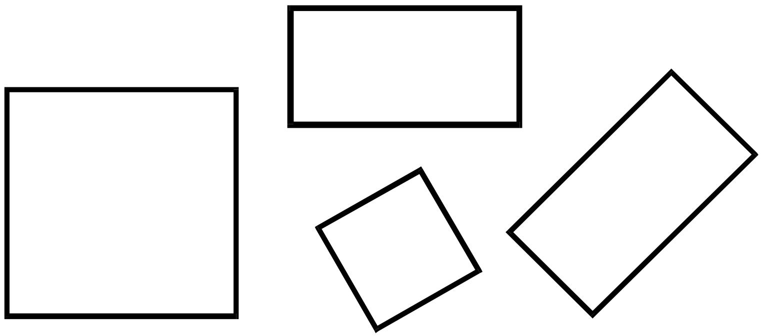
1. En dialog med børnene om rektangler og kvadrater, om hvilken forskel der er på de to firkanter og om, hvordan vi med sikkerhed kan fastslå om en firkant er kvadratisk eller rektangulær. I forlængelse af dialogen fik børnene en opgave, hvor de skulle bestemme om forskellige firkanter var rektangler eller kvadrater.

2. Uden nærmere introduktion, blev følgende opgave omdelt:
   Del op i 4 lige store stykker.

[15] Mogens Hansen: „Intelligens." s. 154



Klip ud og saml et kvadrat.



Efterfølgende blev opgaven gennemgået ved tavlen, og vi snakkede om de nye figurer, kvadraterne nu var inddelt i (rektangler, kvadrater og trekanter), og undersøgte deres indbyrdes forhold. For eksempel fandt vi ud af, at ligegyldigt hvilken figur vi så på, så udgjorde den en kvart af det oprindelige "hele" kvadrat.

----------------------------Matematikken i musikken--------------------------------

Børnene var herefter oppe og tegne de forskellige løsninger til puslespillet, og opdagede at flere af kombinationerne var de samme, blot spejlet eller drejet.

Nu mente vi, at eleverne gennem vores forberedende arbejde, var i stand til at svare på spørgsmål som:

Hvor mange forskellige måder kan vi danne en hel på, underforstået at vi udelukkende benytter os af hele, halve og kvarte?

"Hvad mangler"? Kunne vi også få svar på, når vi lavede en illustration på tavlen af en ufuldstændig takt (4/4).

Kulørte brøker.

Målgruppe: 2.klasse.

Materialer: A2-papir, kvadratisk telefonblokpapir i 6 forskellige farver, lim, saks, lineal, tusch.

Der arbejdes to og to.

1. Introduktion til forløbet. Hvad skal vi lave? Hvad skal vi bruge det til?

2. A2 papir omdeles og opgaven hedder: Inddel papiret i 4x4 lige store stykker. Vi skitserede resultatet på tavlen, men børnene måtte selv finde frem til en egnet metode. Alt efter evne løste eleverne problemet enten ved hjælp af lineal eller ved at bukke papiret.

3. Blokpapiret omdeltes og børnene halverede eller inddelte i kvarte og satte figurerne ind, så at summen i hvert felt var lig en hel. Flere børn delte igen de kvarte i ottendedele, og udviste stor interesse for, hvad der skete når man igen halverede disse.

4. Resultaterne var flotte at se på (se bilag 3) og mange var symmetriske i deres opbygning. Vi hængte rytmesatserne op på tavlen og introducerede til, hvordan disse kunne klappes. Hvis "en hel" varer 4 slag, hvor mange slag varer så "en halv"? - og "en kvart"?

5. Ved at klappe rytmerne oplevede børnene, hvordan matematikken blev til musik. Vi prøvede også at dele klassen i to og klappe satserne parallelt, dette krævede stor koncentration.

Forløbet var meget tilfredsstillende for alle deltagende og vi forlod klassen med den overbevisning, at børnene havde flyttet sig og vi havde nået vores mål.

Didaktiske overvejelser:

I matematik faghæftets læseplan for 1.-3. klasse bliver der lagt vægt på:

- At eleverne benytter forskellige udtryksformer i arbejdet og inddrager sanserne, kroppen og sproget. (Dette punkt vil også være gældende for "Stamp og tegn en fællesnævner").
- At eleverne arbejder i meningsfyldte sammenhænge med indsamling og ordning af ting efter form, størrelse og andre egenskaber.
- At man gennem beskæftigelse med begreber som "at fordoble" og "at halvere" kan forberede arbejde med multiplikation og division.

Forslag til videre arbejde med "kulørte brøker".

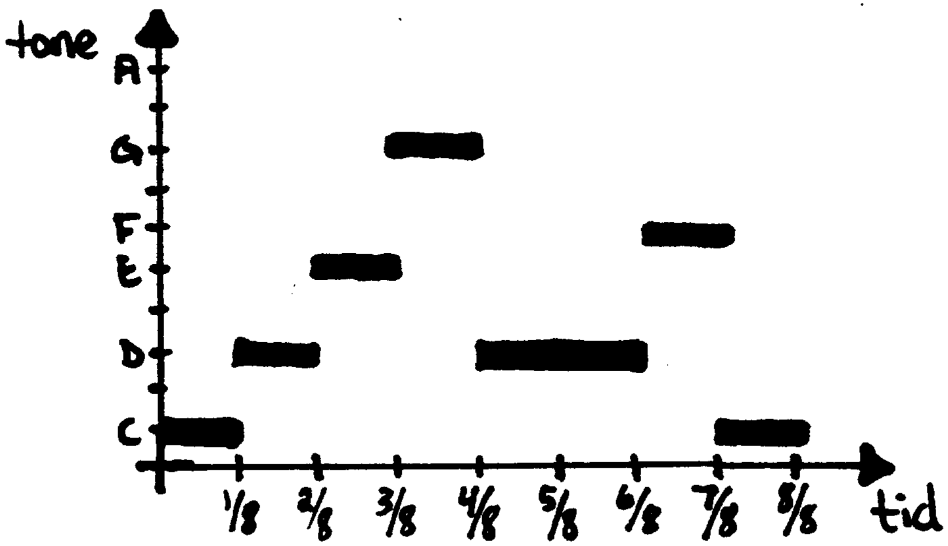
Alt efter klassetrin, kan man arbejde med brøker ned til 1/8 og 1/16, når man laver brøkpartituret. Eventuelt kan man også bruge flere farver, hvor hver farve repræsenterer en tone.

Ideen er, at man nu skriver sit partitur ind i et koordinatsystem med tonerne ud af y-aksen og tiden (tonens værdi) ud af x-aksen.

----------------------------Matematikken i musikken--------------------------------

Eksempel på en takt:

Dette koordinatsystem, kan man skrive ind i et computer-musikprogram f.eks. "Musicator".



Programmet kan oversætte koordinatsystemet til almindeligt nodesystem og spille musikken for børnene.

I koordinatsystemet kan man også lave spejlvendinger og krebsevendinger og på den måde vil ny symmetrisk musik opstå.

Der er også mulighed for at permutere, altså at lave symmetriske omvendinger af elementerne i en takt, og på den måde at skabe nye rækkefølger af tonerne. Dette kan også gøres med takterne som elementer.

Før man starter, skal man give elementerne forskellige talnavne, og bytte om på rækkefølgen, således at intet element står på "egen plads" (f.eks. må 2. element ikke stå på 2. plads).
Det er netop denne rækkefølge, man går ud fra ved hver permutation.

<u>Eksempel på takten ovenfor:</u>

De 7 elementer i takten får numre fra 1-7. Disse byttes om, som før beskrevet og første række kommer til at se således ud: 3 - 7 - 2 - 5 - 6 - 1 - 4

<u>Rækken skal nu læses på følgende måde:</u>

Rækkens 3. element = 2   7. element = 4   2. element = 7 osv.
På denne måde opstår den nye, og de efterfølgende rækker.

3	7	2	5	6	1	4
2	4	7	6	1	3	5
7	5	4	1	3	2	6
4	6	5	3	2	7	1
5	1	6	2	7	4	3
6	3	1	7	4	5	2
1	2	3	4	5	6	7
3	7	2	5	6	1	4

Der er utallige andre måder, at lave ombytning af elementer på, og børnene kan nu selv finde andre metoder til at ændre deres musik på og vil, forudsat at de er engagerede i projektet, benytte sig af matematikken til at udvikle ny musik - nye ideer.

<u>Didaktiske overvejelser:</u>

I faghæftets læseplan for 3.-7. klasse arbejdes der bl.a. med:

- Koordinatsystemet, herunder sammenhængen mellem tal og tegninger.

- Tallenes ordning og tallinjen.

<u>Stamp og tegn en fællesnævner.</u>

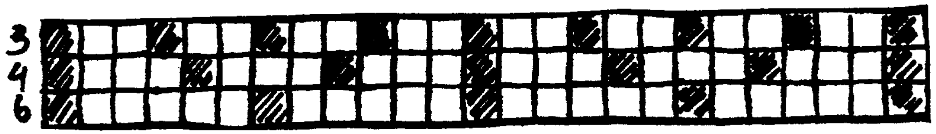
----------------------------Matematikken i musikken--------------------------------

Nedenstående eksempel på en mulig måde at finde frem til en fællesnævner på, kunne forestilles at blive brugt på et begyndende stadium i tillæringen af brøkregning. En idé til, hvordan barnet både kan føle, høre og se, hvordan og hvornår man finder en fællesnævner, som jo bruges, når vi skal lave plus og minus brøkstykker.

Man tager udgangspunkt i legen "stamp en fællesnævner", som formentlig vil virke som en positiv, social og anderledes måde at lære på.

Man vælger eksempelvis tre forskellige tal, som man ønsker at finde fællesnævneren for.
Vores eksempel her, vil dreje sig om tallene 3-4-6 og netop disse tal, har som fællesnævner tallet 12. Børnene vil så i grupper, hver få tildelt et af tallene og de starter alle samtidig med at trampe på slaget 1. Hver enkel elev tæller (tramper) sig så opefter til han/hun rammer sit tal og starter derefter forfra indtil alle rammer slaget 1 igen samtidig. Dette vil være den første fællesnævner vi støder på.

Eksemplet her kan også tegnes, som en grafisk afbildning:



Gennem denne tegning kan børnene nu se "legen" foran sig og vil opdage, at der fra det midterste slag vil fremkomme en symmetrisk spejling. Man behøver selvfølgelig ikke nødvendigvis at stoppe tegningen ved slaget 12, for prøver man at tage flere slag med, vil der dukke flere og større fællesnævnere op. Det eneste der kunne blive en ulempe ville være, at tegningen kom til at blive så lang, at den ville virke uoverskuelig.

Børnene kan nu prøve at lave samme opstilling for nogle andre tal, de ønsker at finde fællesnævneren for og man kan så derudover knytte nogle supplerende spørgsmål som:

<u>Hvornår finder vi den første fællesnævner for f.eks. to ud af de eventuelle fire tal,</u>

der nu har været arbejdet med?

Findes der andre fællesnævnere for de samme tal?

Dette kan også prøves, ved at se på tre af tallene.

Didaktiske overvejelser:

I Faghæftetes læseplan for 3.-7. klasse gælder følgende:

- At brøkbegrebet skal udvide elevernes talforståelse samtidig med at en færdighed i regning med brøker opnås.

- At eleverne skal stifte bekendtskab med metoder til at registrere og skabe overblik over resultater af undersøgelser.

Mozarts menuet og triokomposition.

Ude på nettet kan man finde et spil, hvor man kan komponere sin egen menuet. Mozart har komponeret en menuet, der er noget speciel, idet at den er lavet med henblik på at kunne kombineres på mange forskellige måder. Ved at klippe alle takterne fra hinanden og sætte dem sammen igen på en ny måde, får vi således en ny menuet.

Spillets regler er simple; En menuet består af et menuetstykke der gentages, et triostykke og igen et menuetstykke, altså: AABA. Menuetten laves ved hjælp af et skema, hvor taktnummeret vises horisontalt og terningekastet vertikalt (se bilag 4; *bilaget er ikke med i denne udgave findes på internet, Steen*) og af to sekssidede terninger til A-stykket og af en til B-stykket. I koordinaterne finder man takter, der har den egenskab at være tilpasset den forgående og efterfølgende taktrække, i henhold til datidens harmoniske regler. Det sikrer et rimeligt harmonisk resultat. Man "slår" altså en menuet og bagefter kan man fodre oplysningerne ind i programmet og høre resultatet.

Der er mange matematiske spørgsmål, man kunne knytte til dette arbejde:

----------------------------Matematikken i musikken--------------------------------

Hvor mange forskellige melodier er det muligt at lave i alt?
Her kan man prøve, at finde en algoritme der passer: Problemløsning og kombinatorik.

Giv et bud på, hvor mange I tror der kan laves i alt!
Kan man lave en melodi for hvert menneske på jorden?
Overslagsberegning og problemløsning.

Hvor lang tid vil det tage at spille alle melodier, hvis hver varede 1/2 minut?
Problemløsning og regneøvelse.

Når man slår med to terninger, har alle takter så samme chance for at blive "valgt"? Hvilket slag fremkommer oftest?
Her kunne man regne alle slagenes sandsynlighed ud og lave et statistisk observationssæt over klassens menuetter. Disse kan indtegnes i et søjlediagram og sammenholdes med de faktiske sandsynligheder.

Hvis man i stedet slår med en 12-sidet terning og slår alle etterne om, ville det mon være en god ide?
Hvad hvis man slog ettere i al evighed - er det muligt?
Sandsynlighedsregning.

Var Mozart klar over, at nogle takter fremkommer oftere end andre? Var sandsynlighedsregning tilstrækkeligt udviklet dengang?
Historiske og kulturelle perspektiver.

Didaktiske overvejelser:

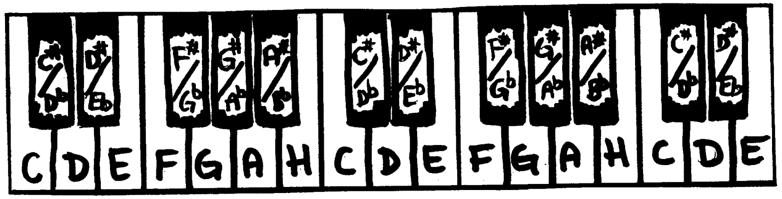
Forløbet lever op til CKF´s krav om, at eleverne skal udvikle færdigheder i:

- At anvende og vurdere statistik.
- At forholde sig til sandsynligheder.
- At bruge grafiske fremstillinger.

Ydermere er der historiske og kulturelle perspektiver og brug af edb i forløbet.

Kvintcirklen.

Cirklen nedenfor kaldes en kvintcirkel. I den finder man alle dur og mol-toneaterne, dur på ydersiden og mol på indersiden.
Nogle toner på klaveret har to navne og alt efter hvilken toneart man vælger, skal man bruge #-navnet som er på højre side af cirklen, eller b-navnet på venstre side. Nederst i cirklen må man vælge enten at bruge # eller b tonearten.



Opgave:

Udfyld cirklen og gør rede for det system du brugte!
Findes der andre systemer? I så fald hvilke?
En durskala består af 8 toner. Den første kaldes grundtonen. Den ottende tone kaldes oktaven og er den samme som grundtonen, men har en lysere klang. En C-durskala har grundtonen C. På et klaver består C-durskalaen af alle de hvide tangenter, fra C til det næste C oktaven over.

Opgave:

Skriv alle tonerne i en C-durskala!

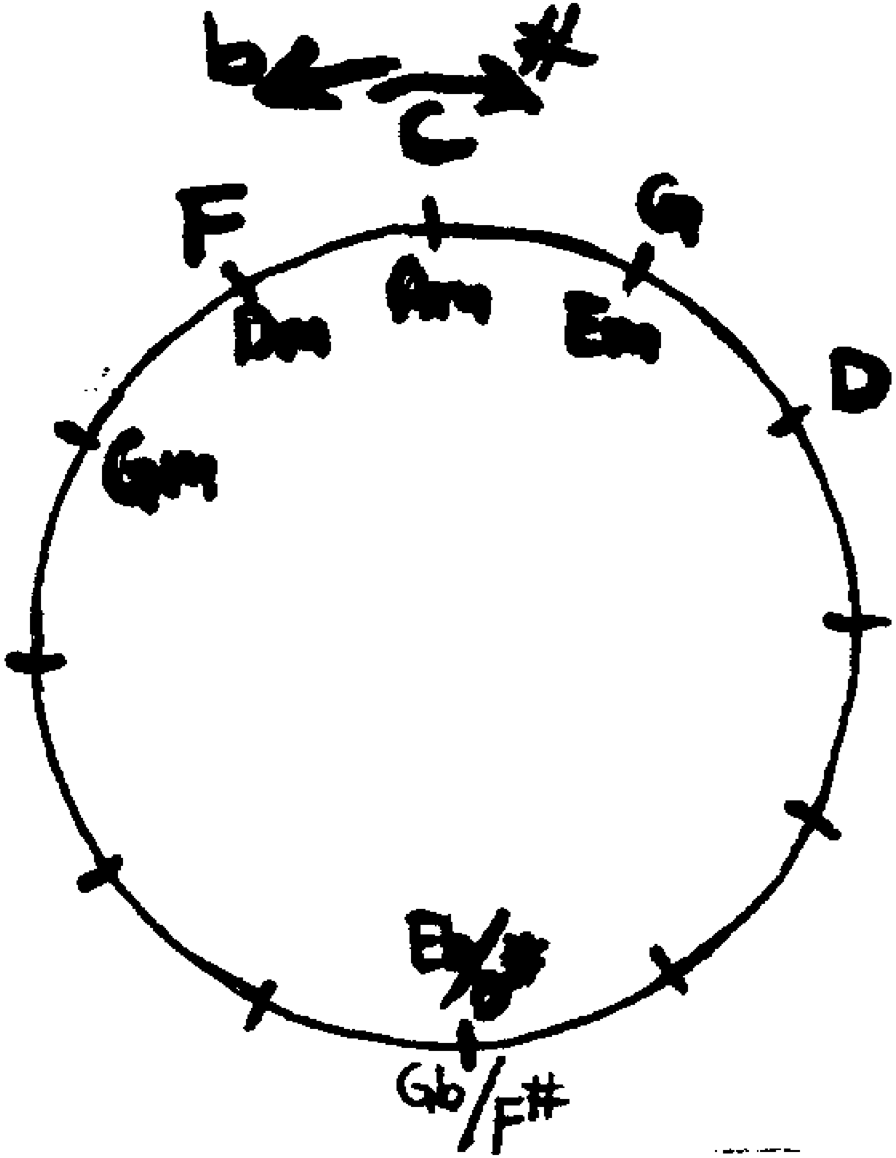
En A-durskala består af tonerne: A-H-C#-D-E-F#-G#-A.

Hvad hedder tonerne i en G-durskala?
Hvad er systemet i opbygningen af en dur-skala?

En A-molskala består også af alle de hvide tangenter, her er grundtonen bare A.

Find systemet for molskalaen!

----------------------------Matematikken i musikken--------------------------------



Det vil være en stor hjælp, hvis børnene kunne prøve at spille skalaerne og dermed få lejlighed til at høre forskellene.

Didaktiske overvejelser:

Hovedtanken med disse opgaver er, at børnene skal lære at konstruere matematiske modeller, at de skal tænke over sammenhænge og rækkefølge af elementer og arbejde med problemløsning. Desuden lærer de her også musikteori.

Det Pythagoræiske tonesystem.

Pythagoras af Samos i Grækenland, levede i år 582-507 f.kr., og var matematiker og filosof.

På hans tid mente man, at universet var bundet sammen af matematiske og musiske principper og derfor også, at alting kan udtrykkes gennem matematikken. Tallene var udtryk for universel harmoni og blev opfattet som verdens byggesten. Musikken kunne derfor også udtrykkes ved tal. De fuldkomne tal 1,2,3,4 (også kaldet tetraktys) der har summen 10 (som ansås for specielt fuldkomment), blev brugt som basis for alle harmoniske forhold.
På dette grundlag skabte Pythagoras den første matematiske model over forholdet mellem forskellige tonehøjder og en strengs længde. Dette tonesystem, eller denne skala, blev grundlaget for vore dages tonesystem; det tempererede system.

Til beregning af skalaen brugte man en monokord, et instrument med en streng. For nemheds skyld, bruger vi vore dages tonenavne til at beskrive tonerne: C-D-E-F-G-A-H-C´.
Den tone der fremkommer ved at slå den løse streng an, kalder vi C og det antal svingninger der fremkommer, satte Pythagoras til 1 (dette er det nemmeste udgangspunkt, rent matematisk og samtidig det første af de fuldkomne tal).

Ved at halvere strengens længde: ½ (igen bruges et fuldkomment tal: 2), fandt han tonen en oktav over C, kaldet C´. I det 17. århundrede fandt man ud af, at tonens højde er omvendt proportional med strengens længde, derfor ved vi at tonen C´ svinger med 2/1. Dette kan evt. illustreres ved eksemplet: Arbejdere og arbejdstid;

-----------------------------Matematikken i musikken---------------------------------

Jo flere arbejdere, des kortere arbejdstid.
Hvis vi deler strengen i 3 dele, finder vi G´ ved 1/3. Da denne svinger med 3/1 kan vi se, at den, da svingningstallet er større end C´, ligger udenfor oktaven. Vi vil kun interessere os for de toner, der ligger imellem C og C´, og ganger derfor 3/1 med ½ for at finde G. Svingningstallet bliver her 3/2.
Det næste skridt ville naturligt være at dele strengen i 4, men da ville vi få ¼ af strengens længde og dermed 4/1 i svingningstal.

<u>SPØRGSMÅL:</u> Men hvorfor kan vi ikke bruge denne udregning til særlig meget?

<u>SVAR:</u> Jo, hvis man regner lidt på det, finder man ud af, at denne tone også er et C, bare to oktaver højere; altså C´´.
<u>SPØRGSMÅL:</u> Har I nogle forslag til, hvordan vi så kunne finde en ny tone?

<u>SVAR:</u> Det Pythagoras gør, er at gange G´s svingningstal med sig selv, for således at finde den tone der ligger en kvint over G. (Husk på at 2/3 er udtryk for forholdet mellem to toner og at dette forhold kaldes en kvint).

<u>SPØRGSMÅL:</u> Hvilken tone finder vi ? Hvad er dennes svingningstal? Ligger den inden for C og C´? Hvis ikke, hvordan finder vi så den tone der gør? Hvad er denne tones svingningstal?

<u>SVAR:</u> Tonen vi finder er D´, som ligger udenfor skalaen. Den har svingningstallet 3/2 • 3/2 = 9/4. Vi finder D, ved at gange med ½ og får svingningstallet 9/8.

Med disse oplysninger skulle eleverne kunne regne resten af skalaen ud, men der opstår et problem. Da kvinten til H er $F^{\#}$ og, hvis man regner videre, så finder vi først F efter at have fundet $C^{\#}$-$G^{\#}$-$D^{\#}$-$A^{\#}$, hvilket er et temmelig stort regnearbejde.

<u>SPØRGSMÅL:</u> Kunne man beregne F på en anden måde?

<u>SVAR:</u> Ja, for vi kender kvinten til F, som er C´ og kan finde F ved at dividere 2 (svingningstallet for C´) med 2/3, hvilket giver 4/3.

<u>Den færdige skala ser sådan ud:</u>

C	D	E	F	G	A	H	C´
1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2

Med en scale-converter (altså en skala-konverterer der kan programmeres til at spille forskellige skalaer), en computer og et keyboard kan man høre resultatet og forsøge sig med at lave musik "på gammeldags maner". Men der er stadig masser af matematik, man kunne tage fat i.

En del mere kompliceret, men også meget spændende, er det at undersøge de problemer, der opstår i det Pythagoræiske tonesystem:

- Det første problem er, at heltonens forhold 9/8 og halvtonens forhold 256/243 (forholdet mellem E og F = 4/3 : 81/64 = 4/3 • 64/81 = 256/243) ikke stemmer overens. Det vil sige, at to halv-toner er mindre end en hel-tone.
  Hvis x er en halv-tone, er x^2 = 9/8 og der af fås x = $\sqrt{9/8}$ = ca. 1,0607
  Da 256:243 = ca. 1,0535, er der en forskel på ca. 0,0072.

- Et andet problem er, at hvis man undersøger om et bestemt antal kvinter ovenpå hinanden kunne lede en frem til samme tone, som et helt antal oktaver ovenpå hinanden, viser det sig at være umuligt. Der vil nemlig opstå en ultra lille forskel på ca. 1/73, også kaldet det Pythagoræiske komma.

Problemet kan ses således:

Kvinten består af 3 hel-toner og 1 halv-tone: (3 • 1 + 1 • ½)x
Oktaven består af 5 hel-toner og 2 halv-toner : (5 • 1 + 2 • ½)y
(3 • 1 + 1 • ½)x ?=? (5 • 1 + 2 •½)y eller 7x ?=? 12y (?=? betyder måske =)
Men da forudsætningen for at denne løsning er rigtig er, at to halv-toner er lig en hel-tone, hvilket ikke er tilfældet, må vi derfor bruge en metode, der bruger de rigtige forhold.
$(3/2)^x = (2/1)^y$ eller $3^x = 2^{x+y}$
3^{12} = 531441 og 2^{7+12} = 524288, forholdet bliver altså 531441/524288 eller ca. 74/73, altså 1/73 mere end det skulle være blevet.

Sådanne undersøgelser ville føre os direkte over i, hvordan man kan løse disse

problemer og det er hvad det tempererede tonesystem prøver.

Det tempererede tonesystem.

Nu om dage bruger vi det, man kalder det tempererede tonesystem. Det er det system, som bedst har klaret problemet med det Pythagoræiske komma.
Her har man fordelt skaden ligeligt mellem de 12 toner i oktaven, på følgende måde:

Frekvensforholdet for en oktav 2:1 skal deles i 12 lige store frekvensforhold. Vi skal altså finde det tal der ganget med sig selv 12 gange giver 2:

$X^{12} = 2$ giver $X = \sqrt[12]{2}$

Nu kan vi regne ud, hvordan båndende på en guitar er placeret og prøve at bygge et et-strenget instrument, eller hvis rammerne ikke tillader dette, tegne en "guitarhals".

Formlen for placering af båndene:

$X_0 = L$ og $X_n = X_{n-1} \cdot 1/S$; hvor $S = \sqrt[12]{2}$ og L = strengens længde.

Opgave: Regn de tolv toners placering ud, hvis strengelængden er 65 cm!

Hvis man kun var interesseret i at finde f.eks. 7. bånd, er det temmelig besværligt, at skulle regne alle de foregående bånds placering ud først. Nogle børn ville ikke blive generet af det, men andre ville nok efterlyse en mere enkel frem-gangsmåde. Hvis man beder dem om at skrive den rekursive funktion op, vil de måske opdage at 1/S bliver ganget med sig selv ligeså mange gange, som det båndnummer man regner ud. Og så kan man jo spørge, om der findes en anden måde at skrive det på. Det vil nok lede over på en snak om forskellen på en rekursiv og en eksponentiel funktion.
Nu kan eleverne lave et pindediagram med strengelængden ud af y aksen og halvtonetrinene ud af x aksen og til sidst tegne horisontale linier over pindenes top. Så kan man se, hvorledes båndene sidder på en guitar.

Didaktiske og pædagogiske overvejelser:

Her er der, som i afsnittet omkring Mozart, inddragelse af kulturhistoriske perspektiver set i forhold til matematikken, dens udvikling og betydning for samfundet.

Opgaverne er baseret på problemløsning. Der er brøkregning, regning med funktioner og grafisk fremstilling.

Dette afsnit om Pythagoras og tonesystemerne er af en noget høj sværhedsgrad, og er hovedsagelig for de ældre klassetrin. Det forudsætter nok også en speciel interesse fra elevernes side (og fra lærerens). Det ville egne sig godt som et værkstedsprojekt, hvor dette kunne være et blandt flere mulige emner.

Afsluttende bemærkninger:

At tage et emne som vores op i skolen, kræver både mod og gode fysiske rammer. Matematiklæreren skal være interesseret i at arbejde med det tværfaglige, og må desuden nok regne med at være igangsætteren, da matematik endnu ikke er helt accepteret som det kreative fag, det jo egentlig er.

Vi tror på, at fremtidens matematikundervisning vil bringe mange nye spændende ideer på banen. Arbejdet med denne opgave har i hvert fald givet os en fornemmelse af de muligheder der ligger i at blande f.eks. matematik og musik, og dette er kun toppen af isbjerget.

"Egentlig kan læreren ikke lære barnet noget. Læreren kan give barnet optimale muligheder for at ændre allerede eksisterende tankemønstre under hensyntagen netop til det eksisterende. Læreren kan hjælpe barnet med at tage skridtet mod ny erkendelse ved at introducere nye begreber og tænkemåder, synsvinkler, som barnet normalt ikke kan skabe på egen hånd. Ikke ved at "lære fra sig", men ved at stimulere/provokere barnet til selv at konstruere sin forståelse."

-----------------------------Matematikken i musikken---------------------------------

Litteratur liste.

- Undervisningsministeriets faghæfte for matematik 1995
- James Jeans: "Musik og Fysik" Gyldendal, 1947
- Kognition og Pædagogik, Marts 1995 4. Årgang, nr. 3
- Lisser Ejersbo: "Matematik er ingen kunst", Fra: CRIT 1-95
- Lisser Ejersbo: "Personlig læring viden og dannelse, maj 1996
- Peter Bastian: "Den fremragende undervisning er en bevidsthedstilstand"
- Mogens Hansen: "Intelligens" Åløkke, 2.udg., 2. Oplæg, 1993
- 7 Fretboard Theory and Fretting. Vi har artiklen fra Steen Grode.
- Christoph J. Scriba: "Matematik og musik", fra Normat 1/1990
- "Composing Mozart variations with dice" Internet adresse: http://www.cs.vu.nl/~zsofi/mozart/momaths.html
- Folkeskolen nr. 44 okt.1996: "Spil en kulørt brøk."
- "Music" Internet addresse: http://charlotte.acns.nwu.edu/smurf/music/indeks.html#Spheres
- TIMSS: "Matematik og naturvidenskab i folkeskolen" Peter Weng DPI
- Poul Borum & Erik Christensen: „Messiaen - en håndbog"